Algebrai topológia / 2010 tavasz / Küronya Alex

6. Házi feladat

1. Ha $f : X \to Y$ folytonos leképezés, akkor minden $p \in \mathbb{Z}$ esetén létezik egy

$$\begin{array}{rcl} f_* : H_p(X) & \longrightarrow & H_p(Y) \\ [[c]] & \mapsto & [[f_\Delta(c)]] \end{array}$$

homomorfizmus, amelyre $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ és $\mathrm{id}_* = \mathrm{id}$.

2. * (Kígyó-lemma) Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot, amelynek a sorai egzaktak:

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"] & C \arrow[r] & C'' & \end{tikzcd}$$

Mutassuk meg, hogy létezik egy

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma$$

egzakt sorozat, ahol $\partial : a'' \mapsto i^{-1}\beta p^{-1}a'' + \operatorname{Im}\alpha$.

3. (Mayer–Vietoris-sorozat, algebrai verzió) Tekintsük az alábbi, egzakt sorokból álló kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "j_n"] & B'_n \arrow[r, "q_n"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & \cdots \end{tikzcd} .$$

Mutassuk meg, hogy amennyiben minden $n \in \mathbb{Z}$-re $\gamma_n : C_n \to C'_n$ izomorfizmus, akkor az

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{A}_n \xrightarrow{(\alpha_n, i_n)} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{j_n - \beta_n} B'_n \xrightarrow{\partial_n \gamma_n^{-1} q_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

sorozat szintén egzakt.

4. * (Koszul-kohomológia) Legyen R kommutatív gyűrű, $x_1, \ldots, x_n \in R$. Definiálunk egy R-modulusokból álló $K_\bullet$ komplexust, az ún. *Koszul-komplexust.* Legyen $K_0 \overset{\text{def}}{=} R$, $K_p \overset{\text{def}}{=} 0$ ha $p > n$ vagy $p < 0$. Amennyiben $1 \leq p \leq n$, akkor $K_p \overset{\text{def}}{=} \oplus Re_{i_1,\ldots,i_p}$ a szabad $\binom{n}{p}$-rangú R-modulus $\left\{e_{i_1,\ldots i_p} \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\right\}$ bázissal. A $d : K_p \to K_{p-1}$ differenciált az alábbi módon definiáljuk:

$$d(e_{i_1,\ldots e_p}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{r=1}^{p} (-1)^r x_{i_r} e_{i_1,\ldots,\widehat{i_r},\ldots,i_p} .$$

Mutassuk meg, hogy $(K_\bullet, d_\bullet)$ valóban egy komplexus.

5. Tekintsünk egy (X, A) párt, ahol $A \neq \emptyset$ aciklikus tér. Igazoljuk, hogy

$$H_\bullet(X, A) \simeq H_\bullet(X) .$$