Algebrai topológia / 2010 tavasz / Küronya Alex

5. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat.
   - Ha X útösszefüggő, $f : X \to X$ folytonos leképezés, akkor $f_* : H_0(X) \to H_0(X)$ az identitás.
   - Legyen k tetszőleges test, $0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0$ véges-dimenziós k-vektorterek egy egzakt sorozata. Ekkor $\dim V_2 = \dim V_1 + \dim V_3$.
   - Ha $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ véges rangú abel-csoportok rövid egzakt sorozata, akkor $\operatorname{rk} A_2 = \operatorname{rk} A_1 + \operatorname{rk} A_3$.
   - Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ abel-csoportok egy rövid egzakt sorozata. Ha A,B és C közül akármelyik kettő szabad abel, akkor a harmadik is.

2. (G^{ab} univerzális tulajdonsága) Legyen G tetszőleges csoport, $G^{\mathrm{ab}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} G/[G,G]$, $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}$ a természetes vetítés. Igazoljuk, hogy tetszőleges A abel-csoport és $\phi : G \to A$ homomorfizmus esetén létezik pontosan egy olyan $\tilde{\phi} : G^{\mathrm{ab}} \to A$ homomorfizmus, amelyre $\tilde{\phi} \circ \pi = \phi$. Bizonyítsuk be, hogy ez a tulajdonság egyértelmű izomorfizmus erejéig jellemzi a $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}$ homomorfizmust.

3. * Legyen X topologikus tér, f X-beli út. Mutassuk meg, hogy $f + \tilde{f} \in \Delta_1(X)$ határ. Igazoljuk azt is, hogy minden konstans út is határ.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ leképezés esetén a

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\phi_X"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "\phi_Y"] \\ H_1(X) \arrow[r, "f_*"] & H_1(Y) \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. A szereplő leképezések közül ϕ_X illetve ϕ_Y a megfelelő Hurewicz-homomorfizmusok, a két f_* pedig az f által a fundamentális csoportok, illetve az első homológiacsoportok között indukált homomorfizmus.

5. Legyen $f : (E, e_0) \to (B, b_0)$ fedőleképezés.
   (1) Mutassuk meg, hogy $f_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ injektív homomorfizmus.
   (2) Igaz-e, hogy $f_* : H_1(E) \to H_1(B)$ injektív?

Definíció. Egy $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ rövid egzakt sorozatot *felhasadó*nak nevezünk, ha létezik olyan $\phi : B \to B$ endomorfizmus, amelyre $\phi^2 = \phi$, és akár $\ker\phi = \operatorname{Im} f = \ker g$, akár $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Im} f = \ker g$.

6. * Legyen $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ egy rövid egzakt sorozat, $\phi : B \to B$ idempotens endomorfizmus. Igazoljuk az alábbiakat.
   (1) $\mathrm{id} - \phi \in \operatorname{End}(B)$ szintén idempotens, továbbá $\ker(\mathrm{id} - \phi) = \operatorname{Im}\phi$, $\operatorname{Im}(\mathrm{id} - \phi) = \ker\phi$, és $B = \ker\phi \oplus \operatorname{Im}\phi$.
   (2) Ha $\ker\phi = \operatorname{Im} f$, akkor $g : \operatorname{Im}\phi \to C$ injektív és $\mathbb{B} = \operatorname{Im} f \oplus C$. Megfordítva, ha $\operatorname{Im} f$ direkt összeadandója B-nek, akkor a $\phi : B \to \operatorname{Im} f$ vetítés egy idempotens endomorfizmus, ami megmutatja, hogy a sorozat felhasad.
   (3) $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ pontosan akkor hasad fel, ha létezik olyan $s : B \to A$ homomorfizmus, amelyre $s \circ f = \mathrm{id}_A$.
   (4) $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ pontosan akkor hasad fel, ha létezik olyan $t : C \to B$ homomorfizmus, amelyre $g \circ t = \mathrm{id}_C$.
   (5) Ha C szabad abel csoport, akkor $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ felhasad.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy lánckomplexusok egy $0 \to A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \to 0$ komplexusa pontosan akkor egzakt, ha minden $p \in Z$-re

$$0 \to A_p \xrightarrow{f_p} B_p \xrightarrow{g_p} C_p \to 0$$

egzakt.

8. (Asszociatív algebrák Hochschild-kohomológiája) Legyen R egy gyűrű, A egy R-algebra, M pedig egy kétoldali A-modulus. Egy

$$\Phi : A^n \longrightarrow M$$

függvény *R-multilineáris*, ha R-lineáris minden komponensében.
(i) Lássuk be, hogy az R-multilineáris leképezések $C^n(A, M)$ halmaza a (megfelelően értelmezett) összeadásra és R-beli elemekkel való szorzásra nézve R-modulust alkot. A $C^0(A, M)$ modulust M-mel azonosítjuk. A $C^n(A, M)$ R-modulus elemeit *A-n értelmezett M-beli n-koláncok*nak nevezzük.
(ii) Az n-edik kohatár-homomorfimzus az alábbi módon definiált

$$\delta^{(n)} : C^n(A, M) \longrightarrow C^{n+1}(A, M)$$

leképezés: ha $n = 0$, akkor

$$\left(\delta^{(0)} u\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} ux - xu ,$$

egyébként pedig (ha $n \geq 1$)

$$\begin{aligned}\left(\delta^{(n)}\Phi\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) &\stackrel{\text{def}}{=} x_1\Phi(x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Phi(x_1, \ldots, x_i x_{i+i}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1}\Phi(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} .\end{aligned}$$

Az $n \leq 0$ esetben minden modulus és leképezés nulla. Igazoljuk, hogy

$$\left(\delta^{(n)}\Phi\right)(x_1, x_2) = x_1\Phi(x_2) - \Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_1)x_2 ,$$

és

$$\left(\delta^{(n)}\Phi\right)(x_1, x_2, x_3) = x_1\Phi(x_2, x_3) - \Phi(x_1 x_2, x_3) + \Phi(x_1, x_2 x_3) + \Phi(x_1, x_2)x_3 ,$$

továbbá, hogy minden $n \leq 0$ esetén

$$\delta^{(n+1)}\delta^{(n)} = 0.$$

Az ily módon definiált komplexus kohomológiája az ún. *Hochschild-kohomológia.*

9. * Legyen $f : A_\bullet \to A'_\bullet$ egy láncleképezés. Minden n-re legyen

$$M_n = A_{n+1} \oplus A'_n ,$$

illetve

$$\begin{aligned}\Delta_n &: M_n \longrightarrow M_{n-1} \\ (a_{n-1}, a1_n) &\mapsto (-d_{n-1}a_{n-1}, d'_n a'_n + f_{n-1}a_{n-1}) .\end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy $(M_\bullet, \Delta_\bullet)$ egy komplexus, ezt hívjuk f *leképezési cilinderének.*

10. Egy (adott esetben mindkét irányban végtelen)

$$\cdots \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} A_i \xrightarrow{\phi_i} A_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

sorozat pontosan akkor egzakt, ha minden $i \in \mathbb{Z}$-re

$$0 \to \operatorname{Im}\phi_{i+1} \to A_i \to \operatorname{Im}\phi_i \to 0$$

egzakt.