4. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat.
   - Minden $f : [0,1] \to [0,1]$ leképezésnek van fixpontja.
   - Minden $f : [0,1) \to [0,1)$ leképezésnek van fixpontja.
   - $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2) \simeq \mathbb{Z}$.
   - Ha $M \subseteq \mathbb{R}^n$ egy konvex nyílt részsokaság, akkor minden $i \geq 1$ esetén $H^i_{DR}(M,\mathbb{R}) = 0$.
   - Ha M összefüggő sima sokaság, akkor $H^0_{DR}(M,\mathbb{R}) = 0$.
   - Legyen R tetszőleges gyűrű, $f : A \to B$ egy R-modulus-homomorfizmus. Ekkor a $0 \to A \xrightarrow{f} B$ sorozat pontosan akkor egzakt, ha f injektív.
   - Az előző feladat jelöléseivel az $A \xrightarrow{f} B \to 0$ sorozat pontosan akkor egzakt, ha f szürjektív.

2. Legyen $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ olyan leképezés, amelyre $f(x) \neq f(-x)$ minden $x \in \mathbb{S}^2$ esetén. Igazoljuk, hogy f szürjektív.

3. Mutassuk meg, hogy minden $A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ mátrixnak van pozitív valós sajátértéke.

4. Tekintsük a $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $z \mapsto z^n$ folytonos leképezést.
   (1) Igazoljuk, hogy $(p_n)_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbb{S}^n, 1)$ injektív.
   (2) Ha $j : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a beágyazás, akkor bizonyítsuk be, hogy $j \circ p_n$ nem nullhomotóp.

5. (de Rham-kohomológia) Legyen M sima (C^∞) sokaság, és jelölje $\Omega^p(M)$ az M-en értelmezett sima differenciál-p-formák valós vektorterét. A szokásos módon definiáljuk loklis koordinátákban lineáris kiterjesztés segítségével differenciálformák külső deriváltját ($p \geq 0$):

$$\begin{array}{rcl} d_p : \Omega^p(M) & \longrightarrow & \Omega^{p+1}(M) \\ \omega = f dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_p} & \mapsto & d\omega \stackrel{\text{def}}{=} df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_p}\ , \end{array}$$

ahol $df = \sum_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.
   (1) Mutassuk meg, hogy d_p lineáris leképezés, amelyre $d_{p+1} \circ d_p = 0$.
   (2) Ha ω egy p-forma, μ egy q-forma, akkor $d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge d\mu$.

A

$$H^p_{DR}(M,\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ker d_p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)}{\operatorname{Im} d_{p-1} : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)}$$

abel-csoport az M sokaság ún. *de Rham-féle kohomológiacsoport*ja.

Definíció. Egy $\omega \in \Omega^p(M)$ differenciálformát *zárt*nak hívunk, ha $d\omega = 0$, vagyis $\omega \in \operatorname{Ker} d_p$. Az ω forma *egzakt*, ha létezik olyan $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$, amelyre $d\eta = \omega$, másképp fogalmazva $\omega \in \operatorname{Im} d_{p-1}$.

6. * Tekintsük az $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ egységkört, legyenek x, y a koordináták a síkon. Ellenőrizzük, hogy a $d \arctan(y/x)$ egy jóldefiniált 1-forma $\mathbb{S}^1$-en, amely zárt, de nem egzakt. Számítsuk ki a $H^0(\mathbb{S}^1,\mathbb{R})$ csoportot.

7. Bizonyítsuk be az egzakt sorozatokra vonatkozó alábbi állításokat.
   (1) Ha a $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ és a $0 \to C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \to 0$ sorozatok egzaktak, akkor a

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \phi\ } B \xrightarrow{\ \alpha\psi\ } D \xrightarrow{\ \beta\ } E \longrightarrow 0$$

   sorozat is egzakt.
   (2) Ha $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ egzakt, f szürjektív, g injektív, akkor $B = 0$.

(3) Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ véges rangú R-modulusok rövid egzakt sorozata. Ekkor
$$\operatorname{rk} B \;=\; \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} C \;.$$

(4) Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ abel-csoportok egy rövid egzakt sorozata. Ha A, B, és C közül kettő szabad abel-csoport, akkor a harmadik is.

8. * (3×3-lemma) Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot, amelyben minden oszlop egzakt.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(1) Mutassuk meg, hogy ha az alsó két sor egzakt, akkor a felső is.
(2) Mutassuk meg, hogy ha a felső két sor egzakt, akkor az alsó is.