Algebrai topológia / 2010 tavasz / Küronya Alex

3. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X,τ) topologikus tér.

- Ha $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ injektív leképezés, akkor $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ injektív homomorfizmus.
- Ha $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ szürjektív leképezés, akkor $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ szürjektív homomorfizmus.
- Ha $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ injektív homomorfizmus, akkor $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ injektív leképezés.
- Ha $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ szürjektív homomorfizmus, akkor $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ szürjektív leképezés.
- Ha $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ bijektív leképezés, akkor $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ bijektív homomorfizmus.

2. Mutassuk meg, hogy minden $p:E\to B$ fedőleképezés nyílt.

3. Legyenek $i=1,2$ esetén $p_i:(E,e_i)\to(B,b_i)$ fedőleképezések. Igazoljuk, hogy
$$p_1\times p_2:(E_1\times E_2,(e_1,e_2))\to(B_1\times B_2,(b_1,b_2))$$
is fedőleképezés.

4. Bizonyítsuk be, hogy a $p_n:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$, $z\mapsto z^n$ hozzárendelés fedőleképezés és hányadosleképezés is egyben.

5. Legyenek $h,k:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ homotóp leképezések.

(1) * Lássuk be, ha $H:X\times I\to Y$ egy h-ból k-ba menő homotópia, akkor a
$$\gamma:(I,0)\longrightarrow(Y,y_0)\ ,\ t\mapsto H(x_0,t)$$
választás egy olyan utat ad meg, amelyre
$$k_* = \tau_\gamma\circ h_*\ .$$

(2) Bizonyítsuk be, hogy ha $h,k:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ homotóp leképezések, akkor h_* pontosan akkor injektív/szürjektív/triviális, ha k_* az.

(3) * Ha $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ homotóp ekvivalencia, akkor $f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ izomorfizmus.

6. (Fedőleképezéshez tartozó monodrómiareprezentáció) Legyen $p:E\to B$ egy fedőleképezés, $b_0\in B$.

(1) Az alábbi $\rho:\pi_1(B,b_0)\times p^{-1}(b_0)\to p^{-1}(b_0)$ függvény jóldefiniált:
$$([f],e)\ \mapsto\ f\ e\text{-ben kezdődő felemelésének a végpontja}\ .$$

(2) Tetszőleges $[f]\in\pi_1(B,b_0)$ esetén a
$$\sigma_p([f]):p^{-1}(b_0)\to p^{-1}(b_0)\ ,\ e\ \mapsto\ \rho([f],e)$$
hozzárendelés $p^{-1}(b_0)$ egy permutációja.

(3) Igazoljuk, hogy a $\sigma_p:\pi_1(B,b_0)\to\mathrm{Sym}(p^{-1}(b_0))$ függvény egy csoportok közti homomorfizmus (ezt hívjuk a p-hez tartozó monodrómiareprezentációnak).