Algebrai topológia / 2010 tavasz / Küronya Alex

2. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X, τ) topologikus tér.

- Ha X egy triviális topologikus tér, akkor minden $x_0 \in X$ esetén $\pi_1(X, x_0) = 1$.
- Ha X n-elemű diszkrét topologikus tér, akkor alapponttól függetlenül $\pi_1(X, x_0)$ izomorf az n-elemű szimmetrikus csoporttal.
- Ha $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homeomorfizmus, akkor
$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$
izomorfizmus.
- Legyen $p : E \to B$ egy útösszefüggő fedőtér. Ha B egyszeresen összefüggő, akkor p homeomorfizmus.

2. Mutassuk meg, hogy ha G topologikus csoport, akkor $\pi_1(G, 1)$ kommutatív.

3. (f_* funktoriális tulajdonságai) Legyenek $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ és $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ folytonos leképezések. Igazoljuk, hogy $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ csoportok közti homomorfizmus, és
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \ .$$
Mutassuk meg, hogy $f_*(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

4. Legyenek $x_0, x_0' \in X$ ugyanabba az útösszefüggőségi komponensbe tartozó pontok, $\gamma : I \to X$ egy út x_0-ból x_0'-ba. Igazoljuk, hogy τ_γ csak γ homotópiaosztályától függ.

5. * Lássuk be, hogy ha X út-összefüggő topologikus tér, $f : X \to Y$ folytonos leképezés, akkor f_* az alábbi értelemben független a bázispont választásától: legyenek $x_0, x_0' \in X$, $\gamma : I \to X$ egy út x_0-ból x_0'-be. Ekkor a
$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\tau_\gamma"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_1(X, x_0') \arrow[d, "f_*"] \\
\pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[r, "\tau_{f \circ \gamma}"] & \pi_1(Y, f(x_0'))
\end{tikzcd}$$
diagramm kommutatív.

6. * Legyen $p : E \to B$ egy fedőtér, B összefüggő. Tegyük fel, hogy egy $x \in B$ pontra a $p^{-1}(x) \subseteq E$ halmaznak $m \in \mathbb{N}$ eleme van. Mutassuk meg, hogy ekkor $|p^{-1}(b)| = m$ minden $b \in B$ esetén. Egy fenti típusú fedőleképezést *m-szeres fedés*nek hívunk.

7. Ha $p : X \to Y$ és $q : Y \to Z$ fedőleképezések, $(q \circ p)^{-1}(z)$ véges minden $z \in Z$ esetén, akkor igazoljuk, hogy $q \circ p$ szintén fedőleképezés.

8. Tetszőleges $p : E \to B$ fedőtér esetén ha B Hausdorff/reguláris, akkor E is az.

9. Legyenek X,Y topologikus terek, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Mutassuk meg, hogy
$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_0(Y, y_0) \ .$$