

2. HÁZI FELADAT

1. *Ellenőrző kérdések:* bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X, τ) topologikus tér.

- Ha X egy triviális topologikus tér, akkor minden $x_0 \in X$ esetén $\pi_1(X, x_0) = 1$.
- Ha X n -elemű diszkrét topologikus tér, akkor alapponttól függetlenül $\pi_1(X, x_0)$ izomorf az n -elemű szimmetrikus csoporttal.
- Ha $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ homeomorfizmus, akkor

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

izomorfizmus.

- Legyen $p : E \rightarrow B$ egy útösszefüggő fedőtér. Ha B egyszeresen összefüggő, akkor p homeomorfizmus.

2. Mutassuk meg, hogy ha G topologikus csoport, akkor $\pi_1(G, 1)$ kommutatív.

3. (f_* funktoriális tulajdonságai) Legyenek $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ és $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ folytonos leképezések. Igazoljuk, hogy $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ csoportok közti homomorfizmus, és

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* .$$

Mutassuk meg, hogy $f_*(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.

4. Legyenek $x_0, x'_0 \in X$ ugyanabba az útösszefüggőségi komponensbe tartozó pontok, $\gamma : I \rightarrow X$ egy út x_0 -ból x'_0 -ba. Igazoljuk, hogy τ_γ csak γ homotópiaosztályától függ.

5. * Lássuk be, hogy ha X út-összefüggő topologikus tér, $f : X \rightarrow Y$ folytonos leképezés, akkor f_* az alábbi értelemben független a bázispont választásától: legyenek $x_0, x'_0 \in X$, $\gamma : I \rightarrow X$ egy út x_0 -ból x'_0 -be. Ekkor a

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\tau_\gamma} & \pi_1(X, x'_0) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{\tau_{f \circ \gamma}} & \pi_1(Y, f(x'_0)) \end{array}$$

diagramm kommutatív.

6. * Legyen $p : E \rightarrow B$ egy fedőtér, B összefüggő. Tegyük fel, hogy egy $x \in B$ pontra a $p^{-1}(x) \subseteq E$ halmaznak $m \in \mathbb{N}$ eleme van. Mutassuk meg, hogy ekkor $|p^{-1}(b)| = m$ minden $b \in B$ esetén. Egy fenti típusú fedőleképezést m -szeres fedésnek hívunk.

7. Ha $p : X \rightarrow Y$ és $q : Y \rightarrow Z$ fedőleképezések, $(q \circ p)^{-1}(z)$ véges minden $z \in Z$ esetén, akkor igazoljuk, hogy $q \circ p$ szintén fedőleképezés.

8. Tetszőleges $p : E \rightarrow B$ fedőtér esetén ha B Hausdorff/reguláris, akkor E is az.

9. Legyenek X, Y topologikus terek, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Mutassuk meg, hogy

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) .$$