Algebrai topológia / 2010 tavasz / Küronya Alex

1. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X, τ) topologikus tér.

- Ha X egy triviális topologikus tér, $x_0 \in X$, akkor bármely két x_0-beli hurok homotóp egymással.
- Ha X n-elemű diszkrét topologikus tér, akkor tetszőleges x_0 alapponttal az x_0-beli hurkoknak pontosan n darab homotópiaosztálya van.
- Egy összehúzható topologikus tér retraktuma is összehúzható.
- Legyen Y tetszőleges topologikus tér, $f, g : X \to Y$ homotóp leképezések. Ha f homeomorfizmus, akkor g is az.
- Ha Y összehúzható topologikus tér, akkor minden $f : X \to Y$ leképezés nullhomotóp.
- Legyen X összefüggő topologikus tér, $X \simeq Y$. Ekkor Y is összefüggő.

2. Az $f : X \to Y$ folytonos leképezések alábbi tulajdonságai közül melyek invariánsak homotópiára nézve: injektív, szürjektív, nyílt, zárt?

3. Az alábbi topológiai tulajdonságok közül melyek invariánsak a homotóp ekvivalenciára nézve: kompakt, út-összefüggő, M_1, M_2, T_i $(0 \leq i \leq 4)$?

4. Legyen G topologikus csoport, f, g $(G, 1_G)$-beli hurkokra jelölje $f \cdot g$ a

$$t \mapsto f(t)g(t) \quad t \in [0,1]$$

pontonkénti szorzatot. Mutassuk meg, hogy $f \cdot g \simeq f * g$.

5. * Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges olyan $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ leképezésekre, amelyekre $\forall x \in \mathbb{S}^n$ $f(x) \neq -g(x)$, szükségképpen $f \simeq g$.

6. * Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{S}^1 \to X$ nullhomotóp leképezés, akkor f kiterjed egy $g : \mathbb{D}^2 \to X$ folytonos leképezéssé, ahol $\mathbb{S}^1 = \partial \mathbb{D}^2$.