Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 tavasz / Küronya Alex

7. Házi feladat

1. Legyen X topologikus tér, $U \subseteq X$ nyílt halmaz, $\mathcal{F}$ abel-csoport kéve X-en. Az $\mathcal{F}$ kéve U-ra történő $\mathcal{F}|_U$ megszorítását az alábbi módon definiáljuk: ha $W \subseteq V \subseteq U$ tetszőleges U-beli nyílt halmazok, akkor

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}|U)(V) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(V) \ , \\ \pi_{VW} &\stackrel{\text{def}}{=} \rho_{VW} \ ,\end{aligned}$$

ahol a π_{VW}-k az $\mathcal{F}|_U$-beli megszorítóleképezések. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{F}|_U$ valóban kéve.

2. Határozzuk meg az

$$V(x^2y^2 + y^2 + x^2 - xyz) \subseteq \mathbb{A}^3$$

ún. affin Steiner-felület szinguláris pontjait.

3. * Legyen X affin varietás, $x \in X$ tetszőleges pont, $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ az x-beli lokális gyűrű maximális ideálja. Igazoljuk, hogy minden k pozitív egész esetén a $\mathfrak{m}_x^k/\mathfrak{m}_x^{k+1}$ k-vektortér véges dimenziós.

4. Írjuk le az alábbi affin sémák struktúrakévéjét: (i) $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]/(x^3 - x^2)$, ($ii$) $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]/(x^2 - x)$, ($iii$) $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$.

5. Lássuk be, hogy minden R kommutatív gyűrű esetén pontosan egy

$$\operatorname{Spec} R \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$

sémamorfizmus van.

6. * Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ kéveleképezés esetén ϕ pontosan akkor izomorfizmus, ha minden $x \in X$-re $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ izomorfizmus.