Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 tavasz / Küronya Alex

6. Házi feladat

1. Tetszőleges k test esetén írjuk le a $k[x]_{(x)}$ gyűrűhöz tartozó affin sémát.

2. Mutassuk meg, hogy minden affin sémából pontosan egy morfizmus megy a $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ affin sémába.

3. Írjuk le a $\operatorname{Spec} 0$ affin sémát, és igazoljuk, hogy minden affin sémába pontosan egy morfizmus megy belőle.

Definíció. Legyen $X = \operatorname{Spec} R$ affin séma, $x \in X$, $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ az x-beli lokális gyűrű maximális ideálja. Az *x pont hányadostestje X-en* a $k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ test.

4. * Mutassuk meg hogy tetszőleges K test és X affin séma esetén egy $\operatorname{Spec} K \to X$ morfizmus megadása ekvivalens egy $x \in X$ pont és egy $k(x) \hookrightarrow K$ beágyazás kiválasztásával.

5. Határozzuk meg az $\mathbb{R}[x]$ affin sémát.

6. ** Legyen $\phi : A \to B$ egy gyűrűhomomorfizmus, $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ a ϕ által indukált sémák közti leképezés. Igazoljuk, hogy ϕ pontosan akkor injektív/szürjektív, ha az

$$f^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$$

kévemorfizmus injektív/szürjektív.

7. * Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek egy R gyűrűre:
   (1) $\operatorname{Spec} R$ mint topologikus tér nem összefüggő.
   (2) Léteznek *ortogonális idempotens elemek*, azaz létezik $e_1, e_2 \in R$, amelyre $e_1^2 = e_1$,$e_2^2 = e_2$, $e_1e_2 = 0$ és $e_1 + e_2 = 1$.
   (3) $R \simeq R_1 \times R_2$, ahol $R_1, R_2 \neq 0$.