Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 tavasz / Küronya Alex

4. Házi feladat

1. Tetszőleges $k$ test esetén írjuk le a $k[x]_{(x)}$ gyűrű spektrumát.

2. Legyen $R$ gyűrű, $f, g \in R$. Igazoljuk az alábbi állításokat:
   (1) $D_f \cap D_g = D_{fg}$.
   (2) $D_f = \emptyset$ pontosan akkor, ha $f$ nilpotens.
   (3) $D_f = \operatorname{Spec} R$ pontosan akkor, ha $f \in R^\times$.
   (4) $D_f = D_g$ pontosan akkor, ha $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.
   (5) $D_f$ kompakt halmaz.
   (6) $U \subseteq \operatorname{Spec} R$ pontosan akkor kompakt, ha véges sok $D_f$ alakú halmaz uniója.

3. * [1] Legyen $\phi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, $\phi^* : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ az általa indukált függvény. Mutassuk meg az alábbiakat:
   (1) Ha $f \in R$, akkor $(\phi^*)^{-1}(D_f) = D_{\phi(f)}$.
   (2) $\phi^*$ folytonos függvény a Zariski-topológiára nézve.
   (3) Ha $I \lhd R$, akkor $(\phi^*)^{-1}(V(I)) = V(\phi(I)S)$, ahol $\phi(I)S$ az $I$ ideál $S$-beli képe által generált ideál $S$-ben.
   (4) Ha $J \lhd S$, akkor $\overline{\phi^*(V(J))} = V(\phi^{-1}(J))$.
   (5) Amennyiben $\phi$ szürjektív, akkor $\phi^*$ $\operatorname{Spec} S$-t homeomorf módon képezi le a $V(\ker \phi) \subseteq \operatorname{Spec} R$ zárt altérre.
   (6) $\phi^*(\operatorname{Spec} S) \subseteq \operatorname{Spec} R$ pontosan akkor sűrű, ha $\ker \phi \subseteq \operatorname{Nil}(R)$.
   (7) Ha $\psi : S \to Q$ szintén egy gyűrűhomomorfizmus, akkor $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

4. Adjunk példát olyan $\phi : R \to S$ homomorfizmusra, amelyre $\phi^*$ bijektív, de nem homeomorfizmus.

[1] Ez a feladat 10 pontot ér.