Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 tavasz / Küronya Alex

4. Házi feladat

1. Mutassuk meg, hogy ha R kommutatív noether-gyűrű, akkor minden $S \subseteq R$ multiplikatív halmaz esetén $S^{-1}R$ is noether.

Definíció. Legyen $X \subseteq \mathbb{A}^n$ affin varietás, tegyük fel, hogy a $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ polinomok generálják $I(X)$-et. Azt mondjuk, hogy az X varietás *sima* az $x \in X$ pontban, ha a

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

mátrix rangja pontosan $n - \dim Y$. Az $x \in X$ pont *szinguláris*, ha nem sima. Az iménti mátrix neve az x pontbeli Jacobi-mátrix.

2. Legyen k tetszőleges test, amelyre char $k \neq 2$. Keressük meg az alábbi $\mathbb{A}^2$-beli görbék szinguláris pontjait.

(1) $y = x + 5$.
(2) $x^2 + y^2 = 1$.
(3) $y^2 = x^3 + \alpha x$, ahol $\alpha \in k$ tetszőleges.
(4) $x^2 = x^4 + y^4$.
(5) $xy = x^6 + y^6$.
(6) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

3. Adjuk meg az alábbi $\mathbb{A}^3$-beli felületek szinguláris pontjait (ismét tegyük fel, hogy char $k \neq 2$).

(1) $7x - 3z = 2y + 5$.
(2) $xy^2 = z^2$.
(3) * $x^2 + y^2 = z^2$.

4. Igaz-e, hogy ha R (kommutatív, egységelemes) noether-gyűrű, akkor az $R[[x]]$ formális hatványsorgyűrű is noether?

5. * Határozzuk meg az $\mathcal{O}_{X,(0,0,0)}$ lokális gyűrűt, ahol $X \subseteq \mathbb{A}^3$ a három koordinátatengely uniója.