Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 tavasz / Küronya Alex

3. Házi feladat

1. Legyen X affin varietás, $U, V \subseteq X$ nemüres nyílt halmazok, $f \in \mathcal{O}_X(U)$, $g \in \mathcal{O}_X(V)$. Mutassuk meg, hogy az a $h \in k(X)$ függvény, amelyre

$$h|_U = f|_U \quad \text{és} \quad h|_V = g|_V \ ,$$

reguláris lesz az $U \cup V$ nyílt halmazon. Lássuk be, hogy minden $\phi \in k(X)$ racionális függvényhez van olyan legnagyobb (a tartalmazásra nézve) nemüres nyílt halmaz, amelyen reguláris.

2. * Azonosítsuk a k testet az $\mathbb{A}^1_k$ affin egyenessel; ezután mutassuk meg, hogy egy ha X egy algebrai halmaz, akkor $f \in k[X]$ folytonos, mint $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ függvény a Zariski-topológiára nézve.

3. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ reguláris leképezésre, amely *nem* izomorfizmus, de homeomorfizmus a Zariski-topológiákra nézve.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy (X, τ) irreducibilis topologikus tér minden nemüres nyílt halmaza irreducibilis és sűrű (X-ben).

5. * A $V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ körvonal mely pontjaiban lesz a $\phi = \frac{y-1}{x}$ racionális függvény reguláris?

6. Legyen X affin varietás, $x \in X$. Igazoljuk, hogy van egy bijektív megfeleltetés az $\mathcal{O}_{X,x}$ lokális gyűrű prímideáljai, és X azon részvarietásai között, amelyek x-et tartalmazzák.

7. Határozzuk meg az $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_k,(0,0)}$ lokális gyűrűt.

8. Tetszőleges R gyűrű esetén adjuk meg $R[x]$-ben a nilpotens elemeket, és az egységeket. Tegyük meg ugyanezt $R[[x]]$-ben.