Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 tavasz / Küronya Alex

# 2. Házi feladat

1. 1. * Legyen $C \overset{\text{def}}{=} V(y^2 = x^2 + x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_k$.
   (1) $C$ mely pontjaiban lesz a $t = \frac{y}{x}$ racionális függvény reguláris? Mutassuk meg, hogy $\frac{y}{x} \notin k[C]$.
   (2) Lássuk be, hogy minden $t \in k(C)$ egyértelműen írható $a(x) + b(x)y$ alakba, ahol $a, b \in k(x)$.

2. Bontsuk fel irreducibilis komponenseire az $X \overset{\text{def}}{=} V(y^2 - xz, z^2 - y^3) \subseteq \mathbb{A}^3_k$ algebrai halmazt. Igazoljuk, hogy minden irreducibilis komponense biracionális az affin egyenessel.

3. * Bizonyítsuk be, hogy két irreducibilis algebrai halmaz szorzata is irreducibilis.

4. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{A}^2_k$ és $\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$ nem homeomorfak, mindkét esetben a Zariski-topológiát feltételezve.

5. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}[x]$ egyváltozós polinomgyűrű összes prímideálját.

6. Legyenek $R$,$S$ gyűrűk. Lássuk be, hogy a $\psi : R[x] \to S$ homomorfizmusok bijektív megfeleltetésben állnak $S$ elemeivel.

7. Egy tetszőleges $k$ test esetén az $R = k[x]$ gyűrű egy *$k$-automorfizmusa* az $R$ olyan automorfizmusa, amely $k$ elemeit elemenként fixen hagyja. Jelölés: $\mathrm{Aut}_k R$.
   (1) Határozzuk meg az $\mathrm{Aut}_k R$ gyűrűt.
   (2) Írjuk le a $k(x)$ test $k$-automorfizmusait.

8. Adjunk példát olyan $R$ gyűrűre és $I, J \subseteq R$ ideálokra, amelyekre $IJ \neq I \cap J$.

9. Bizonyítsuk be vagy cáfoljuk meg az alábbi állításokat.
   (1) Két prímideál metszete prímideál.
   (2) Ha $P$,$Q$ prímideálok, akkor $P + Q$ is az.
   (3) Ha $\phi : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, $\mathfrak{m} \subseteq S$ egy maximális ideál, akkor $\phi^{-1}(\mathfrak{m}) \subseteq R$ szintén maximális ideál.
   (4) Egy tetszőleges $\phi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus esetén minden prímideál inverz képe prímideál.

10. Adjunk példát végtelen-dimenziós Noether-féle topologikus térre.

11. Legyen $X$ tetszőleges topologikus tér, $Y \subseteq X$ egy altér.
    (1) Igazoljuk, hogy $Y$ pontosan akkor irreducibilis, ha $\overline{Y}$ ($Y$-nak az $X$-ben vett lezártja) irreducibilis.
    (2) Mutassuk meg, hogy $Y$ pontosan akkor összefüggő, ha minden $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$ halmaz összefüggő.