Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 tavasz / Küronya Alex

1. Házi feladat

1. Legyen R tetszőleges gyűrű. Ekkor az alábbiak ekvivelensek:
   (1) Minden R-beli ideál végesen generált.
   (2) (Felszálló lánc feltétel) Minden R-beli ideálokból álló $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_m \subseteq \ldots$ ideállánc véges sok lépésben stabilizálódik.

2. * Legyen k tetszőleges test, $\{ S_i \mid i \in I \}$ pedig $k[x_1, \ldots, x_n]$-beli részhalmazok egy halmaza. Mutassuk meg, hogy
   (1) ha $S_1 \subseteq S_2$, akkor $V(S_2) \subseteq V(S_1) \subseteq \mathbb{A}^n_k$;
   (2) $\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i)$.

3. ** Írjuk le, hogy az $\mathbb{A}^2_k$ affin térnek milyen algebrai részhalmazai vannak, ha k algebrailag zárt.

4. * Ha $X \subseteq \mathbb{A}^3_k$ a három koordinátatengely uniója, akkor adjuk meg X ideálját generátorokkal. Mutassuk meg, hogy az $I(X) \subseteq k[x, y, z]$ ideált nem lehet háromnál kevesebb elemmel generálni[1].

5. Legyen X a $\phi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^3$, $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ morfizmus képe. Igazoljuk, hogy X algebrai halmaz, határozzuk meg X ideálját, és döntsük el, hogy mekkora az a legkisebb r egész szám, hogy az $I(X)$ ideál r elemmel generálható.

6. Tekintsük az $f(x, y) = y^2 - x^3$ egyenlettel definiált $C \subseteq \mathbb{A}^2_k$ síkgörbét.
   (1) Igazoljuk, hogy $k[C]$ minden eleme egyértelműen írható $P(x) + Q(x)y$ alakba, ahol $P, Q \in k[x]$.
   (2) Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{A}^1 \to C$, $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} (t^2, t^3)$ reguláris leképezés nem izomorfizmus.

7. Legyen $f : X \to Y$ egy reguláris leképezés,
$$\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, f(x) \mid x \in X \}$$
pedig az f *leképezés gráfja*. Igazoljuk, hogy $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ zárt részhalmaz, továbbá hogy $\Gamma_f \simeq X$.

8. Legyenek X,Y affin algebrai halmazok. Ekkor a $pr_Y : X \times Y \to Y$, $pr_Y(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y$ reguláris leképezés neve *az Y-ra vett vetítés (projekció)*.
   (1) Mutassuk meg, hogy ha $Z \subseteq Y$ zárt halmaz, $f : X \to Y$ egy reguláris leképezés, akkor
$$f(Z) = pr_Y(\Gamma_f \cap Z) .$$
   (2) Bizonyítsuk be, hogy minden $f : X \to Y$ affin algebrai halmazok közti reguláris leképezéshez létezik olyan $g : X \to X \times Y$ morfizmus, hogy g izomorf módon képezi le X-et $X \times Y$ egy zárt részhalmazára, és $f = pr_Y \circ g$. Röviden: minden reguláris leképezés előáll egy beágyazás és egy vetítés kompozíciójaként.

9. * Legyenek $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ algebrai halmazok. Tekintsük az $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{2n}$, illetve a $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} V(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \subseteq \mathbb{A}^{2n}$ algebrai halmazokat. Mutassuk meg, hogy a
$$\phi : X \cap Y \to (X \times Y) \cap \Delta \ , \ x \mapsto (x, x)$$
reguláris leképezés egy izomorfizmus.

10. Határozzuk meg az $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, xy)$ reguláris leképezés képét, és jellemezzük topológiailag.

11. Az X algebrai halmaz egy önmagával vett $f : X \to X$ izomorfizmusát X egy *automorfizmus*ának hívjuk. Mutassuk meg, hogy tetszőleges k test esetén $\mathbb{A}^1_k$ minden automorfizmusa $f(x) = ax + b$ alakú, ahol $a, b \in k$ és $a \neq 0$.

12. Legyen $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Tekintsük a $C \stackrel{\text{def}}{=} V(y^2 = x^2 + x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ síkgörbét és az $f(x) = (x^2 - 1, x(x^2 - 1))$ képlettel definiált $f : \mathbb{A}^1 \to C$ reguláris leképezést. Bizonyítsuk be, hogy
$$f^* : k[C] \xrightarrow{\sim} \{ g(x) \in k[x] \mid g(1) = g(-1) \} \subseteq k[x] .$$

[1] Ez a tény azért érdekes, mert $X \subseteq \mathbb{A}^3_k$ kodimenziója csak 2.