Bevezetés az algebrai topológiába / 2009 tavasz / Küronya Alex

9. Házi feladat

1. Ha X útösszefüggő, $f : X \to X$ tetszőleges leképezés, akkor $f_* : H_0(X) \to H_0(X)$ az identitás.

2. Legyen $f : (X, x_0) \to (Y.y_0)$ tetszőleges leképezés. Mutassuk meg, hogy a fundamentális csoportokon illetve a homológiacsoportokon indukált homomorfizmusból és a Hurewicz-homomorfizmusokból készített

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\phi_X"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "\phi_Y"] \\
H_1(X) \arrow[r, "f_*"] & H_1(Y)
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

3. (Kígyó-lemma) Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot, amelynek a sorai egzaktak:

$$\begin{tikzcd}
& A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "i"] & C \arrow[r] & C'' &
\end{tikzcd}$$

Mutassuk meg, hogy létezik egy

$$\ker\alpha \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow \ker\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{coker}\beta \longrightarrow \operatorname{coker}\gamma$$

egzakt sorozat, ahol $\partial : a'' \mapsto i^{-1}\beta p^{-1}a'' + \operatorname{im}\alpha$.

4. (Mayer–Vietoris-sorozat, algebrai verzió) Tekintsük az alábbi, egzakt sorokból álló kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "j_n"] & B'_n \arrow[r, "q_n"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] & \cdots\ .
\end{tikzcd}$$

Mutassuk meg, hogy amennyiben minden $n \in \mathbb{Z}$-re $\gamma_n : C_n \to C'_n$ izomorfizmus, akkor az

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{A}_n \xrightarrow{(\alpha_n, i_n)} A'_n \oplus B_n \xrightarrow{j_n - \beta_n} B'_n \xrightarrow{\partial_n \gamma_n^{-1} q_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

sorozat szintén egzakt.

5. ** (Mayer–Vietoris-sorozat, topológiai verzió) Legyen X topologikus tér, $A, B \subseteq X$ olyan alterek, amelyekre $X = \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B$. Jelöljék

$$i^A : A \cap B \hookrightarrow A\ ,\ i^B : A \cap B \hookrightarrow B\ ,\ j^A : A \hookrightarrow A \cup B\ ,\ j^B : B \hookrightarrow A \cup B$$

a megfelelő beágyazásokat. Ekkor a

$$0 \longrightarrow \Delta_i(A \cap B) \overset{i^A_* \oplus i^B_*}{\longrightarrow} \Delta_i(A) \oplus \Delta_i(B) \overset{j^A_* - j^B_*}{\longrightarrow} \Delta_i^{A,B}(A \cup B) \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt. Lássuk be ennek segítségével, hogy a

$$\cdots \longrightarrow H_i(A \cap B) \overset{i^A_* \oplus i^B_*}{\longrightarrow} H_i(A) \oplus H_i(B) \overset{j^A_* - j^B_*}{\longrightarrow} H_i(A \cup B) \longrightarrow H_{i-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

sorozat is egzakt. Ez utóbbit nevezzük az A, B párhoz tartozó *Mayer–Vietoris-sorozat*nak.

6. * (Koszul-kohomológia) Legyen R kommutatív gyűrű, $x_1, \ldots, x_n \in R$. Definiálunk egy R-modulusokból álló $K_\bullet$ komplexust, az ún. *Koszul-komplexust*. Legyen $K_0 \stackrel{\text{def}}{=} R$, $K_p \stackrel{\text{def}}{=} 0$ ha $p > n$ vagy $p < 0$. Amennyiben $1 \leq p \leq n$, akkor $K_p \stackrel{\text{def}}{=} \oplus Re_{i_1,\ldots,i_p}$ a szabad $\binom{n}{p}$-rangú R-modulus $\left\{e_{i_1,\ldots i_p} \,|\, 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\right\}$ bázissal. A $d : K_p \to K_{p-1}$ differenciált az alábbi módon definiáljuk:

$$d(e_{i_1,\ldots e_p}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=1}^{p} (-1)^r x_{i_r} e_{i_1,\ldots,\widehat{i_r},\ldots,i_p} \; .$$

Mutassuk meg, hogy $(K_\bullet, d_\bullet)$ valóban egy komplexus.

Definíció. Legyen n egy pozitív egész szám, $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tetszőleges folytonos leképezés. Ekkor az $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$ indukált leképezés egy $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ homomorfizmus, ami szükségképpen $f_*(z) = dz$ alakú egy $d \in \mathbb{Z}$ (természetesen f-től függő) számra. Az f *leképezés foka* $\deg f \stackrel{\text{def}}{=} d$.

7. * Mutassuk meg az $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ leképezések fokának alábbi tulajdonságait:
   (1) $\deg \mathrm{id}_{\mathbb{S}^n} = 1$.
   (2) Ha f nem szürjektív, akkor $\deg f = 0$.
   (3) Ha $f \simeq g$, akkor $\deg f = \deg g$.
   (4) $\deg(f \circ g) = (\deg f) \cdot (\deg g)$.
   (5) Ha f az $\mathbb{S}^n$ gömb egy egyenlítősíkjára való tükrözése, akkor $\deg f = -1$.
   (6) Az $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $x \mapsto -x$ antipodális leképezés foka $(-1)^{n+1}$.
   (7) Ha $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ fixpontmentes, akkor $\deg f = (-1)^{n+1}$.

8. Ha n páros szám, G egy csoport, ami fixpontmentesen hat az $\mathbb{S}^n$ gömbön, akkor $G \leqslant \mathbb{Z}_2$.

9. Igazoljuk Brouwer fixponttételét $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ leképezésekre.