8. HÁZI FELADAT

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat.

- Ha a $0 \to A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$ és a $0 \to C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} E \to 0$ sorozatok egzaktak, akkor a
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\alpha\psi} D \xrightarrow{\beta} E \longrightarrow 0$$
sorozat is egzakt.
- Ha $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ egzakt, f szürjektív, g injektív, akkor $B = 0$.
- Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ véges rangú R-modulusok rövid egzakt sorozata. Ekkor
$$\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} C .$$
- Legyen $0 \to A \to B \to C \to 0$ abel-csoportok egy rövid egzakt sorozata. Ha A, B, és C közül kettő szabad abel-csoport, akkor a harmadik is.

2. (i) Lássuk be, hogy lánckomplexusok egy sorozata pontosan akkor egzakt, ha minden n-re
$$A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n$$
egzakt.
(ii) Legyen $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$ komplexusok egy rövid egzakt sorozata. Igazoljuk, hogy ha $A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet$ közül kettő egzakt, akkor a harmadik is.

2. * (3×3-lemma) Tekintsük az alábbi kommutatív diagrammot:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd},$$

amelyben minden oszlop egzakt.
(i) Ha az alsó két sor egzakt, akkor a felső is.
(ii) Ha a felső két sor egzakt, akkor az alsó is.

3. ** Határozzuk meg közvetlen számolással a $H^i_{DR}(S^1;\mathbb{R})$ de Rham-kohomológiacsoportokat.

4. (Asszociatív algebrák Hochschild-kohomológiája) Legyen R egy gyűrű, A egy R-algebra, M pedig egy kétoldali A-modulus. Egy
$$\Phi : A^n \longrightarrow M$$
függvény R-*multilineáris*, ha R-lineáris minden komponensében.
(i) Lássuk be, hogy az R-multilineáris leképezések $C^n(A, M)$ halmaza a (megfelelően értelmezett) összeadásra és R-beli elemekkel való szorzásra nézve R-modulust alkot. A $C^0(A, M)$ modulust M-mel azonosítjuk. A $C^n(A, M)$ R-modulus elemeit *A-n értelmezett M-beli n-koláncok*nak nevezzük.
(i) Az n-edik kohatár-homomorfimzus az alábbi módon definiált
$$\delta^{(n)} : C^n(A, M) \longrightarrow C^{n+1}(A, M)$$

leképezés: ha $n = 0$, akkor

$$\left(\delta^{(0)}u\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} ux - xu \ ,$$

egyébként pedig (ha $n \geq 1$)

$$\begin{aligned}\left(\delta^{(n)}\Phi\right)(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) &\stackrel{\text{def}}{=} x_1\Phi(x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\Phi(x_1, \ldots, x_i x_{i+i}, \ldots, x_{n+1}) + (-1)^{n+1}\Phi(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} \ .\end{aligned}$$

Az $n \leq 0$ esetben minden modulus és leképezés nulla. Igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned}\left(\delta^{(n)}\Phi\right)(x_1, x_2) &= x_1\Phi(x_2) - \Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_1)x_2 \ , \\ &\text{és} \\ \left(\delta^{(n)}\Phi\right)(x_1, x_2, x_3) &= x_1\Phi(x_2, x_3) - \Phi(x_1x_2, x_3) + \Phi(x_1, x_2x_3) + \Phi(x_1, x_2)x_3 \ ,\end{aligned}$$

továbbá, hogy minden $n \leq 0$ esetén

$$\delta^{(n+1)}\delta^{(n)} = 0.$$

Az ily módon definiált komplexus kohomológiája az ún. *Hochschild-kohomológia.*

6. * Legyen $f : A_\bullet \to A'_\bullet$ egy láncleképezés. Minden n-re legyen

$$M_n = A_{n+1} \oplus A'_n \ ,$$

illetve

$$\begin{aligned}\Delta_n \quad &: \quad M_n \longrightarrow M_{n-1} \\ (a_{n-1}, a1_n) \quad &\mapsto \quad (-d_{n-1}a_{n-1}, d'_n a'_n + f_{n-1}a_{n-1}) \ .\end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy $(M_\bullet, \Delta_\bullet)$ egy komplexus, az f leképezés ún. *leképezési cilindere.*

7. Egy (adott esetben mindkét irányban végtelen)

$$\cdots \longrightarrow A_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} A_i \xrightarrow{\phi_i} A_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

sorozat pontosan akkor egzakt, ha minden $i \in \mathbb{Z}$-re

$$0 \to \operatorname{im}\phi_{i+1} \to A_i \to \operatorname{im}\phi_i \to 0$$

egzakt.

8. * (i) Legyen $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ egy komplexusok közti láncleképezés. Mutassuk meg, hogy $f_\bullet$ i-határokat i-határokba és i-ciklusokat i-ciklusokba képez, továbbá minden $i \in \mathbb{Z}$-re indukál egy

$$H_i(A_\bullet) \xrightarrow{H_i(f)_\bullet} H_i(B_\bullet)$$

R-modulushomomorfizmust.
(*ii*) Bizonyítsuk be, hogy ha $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$,$g_\bullet : B_\bullet \to C_\bullet$ komplexusok közti láncleképezések, akkor

$$H_i(g \circ f) \ = \ H_i(g) \circ H_i(f) \ ,$$

továbbá tetszőleges $A_\bullet$ komplexus esetén $H_i(\mathrm{id}_{A_\bullet}) = \mathrm{id}_{H_i(A_\bullet)}$.

9. ** Legyen $G = (V, E)$ egy véges gráf, I az incidenciamátrixa. Tekintsük a következő komplexust:

$$C_i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{a szabad } R\text{-modulus a } V \text{ halmazon} & \text{ha } i = 0 \\ \text{a szabad } R\text{-modulus az } E \text{ halmazon} & \text{ha } i = 1 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az egyetlen nemtriviális differenciált az incidenciamátrixszal való szorzás adja meg. Számítsuk ki a fenti komplexus homológiáját.