Bevezetés az algebrai topológiába / 2009 tavasz / Küronya Alex

7. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X,τ) topologikus tér.

- Ha X egy triviális topologikus tér, akkor minden $x_0 \in X$ esetén $\pi_1(X, x_0) = 1$.
- Ha X n-elemű diszkrét topologikus tér, akkor alapponttól függetlenül $\pi_1(X, x_0)$ izomorf az n-elemű szimmetrikus csoporttal.
- Egy összehúzható topologikus tér retraktuma is összehúzható.
- Legyen Y tetszőleges topologikus tér, $f, g : X \to Y$ homotóp leképezések. Ha f homeomorfizmus, akkor g is az.
- Ha $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homeomorfizmus, akkor
  $$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$$
  izomorfizmus.
- Ha Y összehúzható topologikus tér, akkor minden $f : X \to Y$ leképezés nullhomotóp.

2. Az $f : X \to Y$ folytonos leképezések alábbi tulajdonságai közül melyek invariánsak homotópiára nézve: injektív, szürjektív, nyílt, zárt?

3. Az alábbi topológiai tulajdonságok közül melyek invariánsak a homotóp ekvivalenciára nézve: kompakt, összefüggő, út-összefüggő, M_1, M_2, T_i $(0 \le i \le 4)$?

4. Mutassuk meg, hogy ha G topologikus csoport, akkor $\pi_1(G, 1)$ abel-csoport.

5. Legyen $\phi : G \to H$ topologikus csoportok közti leképezés.
(i) Igazoljuk, hogy $\ker \phi \subseteq G$ egy zárt normálosztó.
(ii) Mutassuk meg, hogy ha G kompakt és ϕ szürjektív, akkor
$$G/\ker\phi \approx H$$
mint topologikus csoportok (azaz a ϕ által indukált $\widetilde{\phi} : G/\ker\phi \to H$ leképezés topologikus terek közti homeomorfizmus *és* csoportok közti izomorfizmus is egyben).

6. * Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges olyan $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ leképezésekre, amelyekre $\forall x \in \mathbb{S}^n$ $f(x) \neq -g(x)$, szükségképpen $f \simeq g$.

7. ** (Homotópia-kiterjesztési lemma) Legyen X egy topologikus tér, amelyre $X \times I$ normális; legyen továbbá $A \subseteq X$ egy zárt altér, $f : A \to Y \subseteq \mathbb{R}^n$, Y nyílt. Mutassuk meg, hogy ha f nullhomotóp, akkor kiterjeszthető egy nullhomotóp $g : X \to Y$ leképezéssé.

8. (f_* funktoriális tulajdonságai) Legyenek $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ és $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ folytonos leképezések. Igazoljuk, hogy $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ csoportok közti homomorfizmus, és
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \ .$$
Mutassuk meg, hogy $f_*(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.

9. Legyenek $x_0, x_0' \in X$ ugyanabba az útösszefüggőségi komponensbe tartozó pontok, $\gamma : I \to X$ egy út x_0-ból x_0'-ba. Igazoljuk, hogy τ_γ csak γ homotópiaosztályától függ.

10. Lássuk be, hogy ha X út-összefüggő topologikus tér, $f : X \to Y$ folytonos leképezés, akkor f_* az alábbi értelemben független a bázispont választásától: legyenek $x_0, x_0' \in X$, $\gamma : I \to X$ egy út x_0-ból x_0'-be. Ekkor a

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\tau_\gamma"] \arrow[d, "f_*"] & \pi_1(X, x_0') \arrow[d, "f_*"] \\ \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[r, "\tau_{f\circ\gamma}"] & \pi_1(Y, f(x_0')) \end{tikzcd}$$

diagramm kommutatív.

11. * Bizonyítsuk be, hogy ha $f : \mathbb{S}^1 \to X$ nullhomotóp leképezés, akkor f kiterjed egy $g : \mathbb{D}^2 \to X$ folytonos leképezéssé, ahol $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$.