Bevezetés az algebrai topológiába / 2009 tavasz / Küronya Alex

6. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X, τ) topologikus tér.

- Ha $f : X \to Y$ és $g : Z \to W$ nyílt azonosítóleképezések, akkor $f \times g : X \times Y \to Z \times W$ is az.
- Ha $q : X \to Y$ hányadosleképezés, $A \subseteq X$, akkor $q|_A : A \to q(A)$ szintén hányadosleképezés.
- Ha $q : X \to Y$ hányadosleképezés, X Hausdorff, akkor Y is Hausdorff.
- Minden hányadosleképezés vagy nyílt, vagy zárt.
- Egy nyílt szürjektív leképezés hányadosleképezés.
- Egy zárt szürjektív leképezés hányadosleképezés.
- Két hányadosleképezés kompozíciója is hányadosleképezés.
- Ha $\sim$ egy ekvivalenciareláció X-en, amelynek minden osztálya zárt, akkor $X/\sim$ T_1 tér lesz.
- Ha $\sim$ egy olyan ekvivalenciareláció X-en, amelynek minden osztálya nyílt, akkor $X/\sim$ Hausdorff tér.

2. Legyen X topologikus tér; tekintsük az alábbi $\sim$ relációt X-en: $x \sim y$ pontosan akkor, ha minden $U \in \tau$ esetén $x \in U \iff y \in U$. Döntsük el, hogy $X/\sim$ minden esetben T_0-tér-e.

3. A G topologikus csoport egy $S \subseteq G$ részhalmazát *szimmetrikus*nak nevezzük, ha $S^{-1} = S$. Mutassuk meg, hogy az $1 \in G$ egységelem szimmetrikus környezetei 1 egy környezetbázisát adják.

4. Igazoljuk, hogy a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ általános lineáris csoport topologikus csoport a szokásos mátrixszorzásra és inverzképzésre nézve (a topológiát a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$ beágyazásból származtatjuk).

5. Minden G topologikus csoportban az egységelem összefüggőségi komponense zárt normálosztó G-ben.

6. * Legyen G topologikus csoport, $H \leqslant G$ zárt részcsoport. Igazoljuk, hogy a baloldali mellékosztályok

$$G/H \stackrel{\text{def}}{=} \{\, gH \mid g \in G \,\}$$

halmaza a hányadostopológiával (amit a $\pi : G \to G/H$ természetes vetítés határoz meg) egy Hausdorff topologikus tér. A G/H tér pontosan akkor diszkrét, ha $H \leqslant G$ nyílt.

7. Bizonyítsuk be, hogy az alábbiak ekvivalensek egy G topologikus csoport esetén:

(1) A $\Delta : G \to G \times G$, $\Delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x, x)$ diagonális leképezés zárt.
(2) $\{1\} \leqslant G$ zárt részcsoport.
(3) Az egységelem összes környezetének a metszete pontosan $\{1\}$.

8. * Mutassuk meg, hogy egy topologikus csoportban minden nyílt részcsoport zárt, és minden véges indexű zárt részcsoport nyílt.

Definíció. Legyenek X,Y topologikus terek, $A \subseteq X$ zárt részhalmaz, $f : A \to Y$ tetszőleges leképezés. Legyen

$$Y \cup_f X \stackrel{\text{def}}{=} \left(X \coprod Y \right) /\!\sim ,$$

ahol $\sim$ a $\{(a, f(a) \mid a \in A\}$ részhalmaz által generált ekvivalenciareláció. Az $Y \cup_f X$ tér *X-nek az f mentén történő hozzáragasztása Y-hoz.*

9. Mutassuk meg az előző definícó jelöléseivel, hogy $u, v \in X \cup Y$ esetén pontosan akkor áll $u \sim v$ ha az alábbiak legalább egyike teljesül: (*i*) $u = v$; (*ii*) $u, v \in A$ és $f(u) = f(v)$; (*iii*) $u \in A$, $v \in Y$, és $f(u) = v$.

10. Igazoljuk, hogy az $Y \hookrightarrow Y \cup_f X$ természetes beágyazás Y-t szürjektív módon képezi le egy zárt altérre, míg az $X - A \hookrightarrow Y \cup_f X$ injektív leképezés képe nyílt. .

11. Legyenek X, Y be normális topologikus terek, $A \subseteq X$ zárt altér, $f : A \to Y$ egy zárt leképezés. Bizonyítsuk be, hogy $Y \cup_f X$ szintén normális. (** Mutassuk meg, hogy az állítás akkor is igaz, ha f nem feltétlenül zárt.)

12. Bizonyítsuk be, hogy két hányadosleképezés szorzata nem feltétlenül hányadosleképezés.

Definíció. Legyen $\sim$ egy ekvivalenciareláció X-en, $A \subseteq X$ egy altér. Ekkor A *szaturációja*:

$$\mathrm{sat}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \exists a \in A : x \sim a\} \ .$$

13. * Legyen $\sim$ egy ekvivalenciareláció az (X, τ) topologikus téren, $A \subseteq X$ egy olyan altér, amely metszi $\sim$ minden ekvivalenciaosztályát. Mutassuk meg, hogy létezik egy jóldefiniált

$$k : A/{\sim} \longrightarrow X/{\sim}$$

folytonos függvény, amely homeomorfizmus, ha minden A-beli nyílt halmaz X-beli szaturációja nyílt X-ben.

14. Tekintsük az alábbi ekvivalenciarelációt $\mathbb{R}^2$-en: $(x, y) \sim (x', y')$, amennyiben $x + y^2 = x' + y'^2$. Írjuk le az $\mathbb{R}^2/\sim$ hányadosteret.