Bevezetés az algebrai topológiába / 2009 tavasz / Küronya Alex

5. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X, τ) topologikus tér.

- Ha Y topologikus tér, akkor a $\pi_1 : X \times Y \to X$ és $\pi_2 : X \times Y \to Y$ vetítések nyílt leképezések.
- Ha $A \subseteq X$ és $B \subseteq Y$ zárt halmazok, akkor $A \times B \subseteq X \times Y$ is zárt.
- Tetszőleges $A \subseteq X$ és $B \subseteq Y$ esetén $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B} \subseteq X \times Y$.
- Igaz-e az előző állítás végtelen sok tényezős szorzatra?
- Ha $X_1, \ldots, X_m$ topologikus terek, akkor $(X_1 \times \cdots \times X_{m-1}) \times X_m \approx X_1 \times \cdots \times X_m$.
- Véges sok Hausdorff topologikus tér szorzata is Hausdorff.
- Ha X lokálisan kompakt, $f : X \to Y$ folytonos, akkor $f(X) \subseteq Y$ is lokálisan kompakt.
- Egy diszkrét topologikus tér mindig lokálisan kompakt.
- Minden metrikus tér lokálisan kompakt.

2. * (Cső-lemma) Legyen X tetszőleges, Y kompakt topologikus tér, $x \in X$ tetszőleges pont, $N \subseteq X \times Y$ egy nyílt halmaz, amelyre $\{x\} \times Y \subseteq N$. Igazoljuk, hogy létezik olyan U környezete x-nek X-ben, amelyre $N \supseteq W \times Y$.

3. Legyenek $F, G \subseteq X$ diszjunkt kompakt alterei az X Hausdorff-térnek. Mutassuk meg, hogy léteznek diszjunkt $U, V \subseteq X$ nyílt halmazok, amelyekre $F \subseteq U$ és $G \subseteq V$.

4. Bizonyítsuk be, hogy egy izolált pont nélküli nemüres kompakt Hausdorff-tér nem megszámlálható.

5. Igazoljuk, hogy egy legalább két pontból álló összefüggő metrikus tér nem lehet megszámlálható.

6. Legyen X egy M_2 topologikus tér, $A \subseteq X$ egy nem megszámlálható részhalmaz. Mutassuk meg, hogy A-nak megszámlálhatónál több pontja lesz A határpontja.

7. * Bizonyítsuk be, hogy egy X topologikus tér pontosan akkor Hausdorff, ha

$$\Delta_X \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, x) \,|\, x \in X\} \subseteq X \times X$$

zárt részhalmaz.

8. Legyenek $f, g\colon X \to Y$ folytonos függvények, Y Hausdorff. Ekkor

$$\{x \in X \,|\, f(x) = g(x)\} \subseteq X$$

zárt részhalmaz. Lássuk be továbbá, hogy ha az f és g függvények megegyeznek X egy sűrű részhalmazán, akkor $f = g$.

9. Legyen $f : X \to Y$ egy szürjektív zárt leképezés. Mutassuk meg, hogy ha X normális, akkor Y is az.

Definíció. Legyen X topologikus tér, $x \in X$. Azt mondjuk, hogy X *lokálisan kompakt x-ben*, ha létezik olyan $C \subseteq X$ kompakt halmaz, amely tartalmazza x egy környezetét. Az X tér maga *lokálisan kompakt*, ha minden $x \in X$ pontban lokálisan kompakt.

10. * Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ lokálisan kompakt, de $\mathbb{Q}$ nem az.

11. Legyen X egy lokálisan kompakt Hausdorff-tér, $A \subseteq X$. Igazoljuk, hogy ha A nyílt vagy zárt, akkor A is lokálisan kompakt.

12. Legyen $\phi\colon A \to B$ (egységelemes) kommutatív gyűrűk közti homomorfizmus.

(1) Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{aligned} \widetilde{\phi}\colon \operatorname{Spec} B &\to \operatorname{Spec} A \\ P &\mapsto \phi^{-1}(P) \end{aligned}$$

hozzárendelés egy jóldefiniált folytonos függvény (a Zariski-topológiára nézve).

(2) Ha ϕ szürjektív, akkor $\widetilde{\phi}$ a $\operatorname{Spec} B$ teret homeomorf módon képezi le a $V(\ker \phi) \subseteq \operatorname{Spec} A$ zárt altérre.

(3) Amennyiben ϕ injektív, akkor $\widetilde{\phi}(\operatorname{Spec} B) \subseteq \operatorname{Spec} A$ sűrű részhalmaz.

13. ** Legyen R Boole-gyűrű (azaz $a^2 = a$ minden $a \in R$ esetén). Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{Spec} A$ kompakt Hausdorff-tér.

Definíció. Egy G topologikus teret *topologikus csoport*nak nevezünk, ha adott rajta egy csoport-struktúra úgy, hogy a $\mu : G \times G \to G$ szorzás és $\iota : G \to G$ inverzképzés folytonos függvények. Egy $H \subseteq G$ altér *(topologikus) részcsoportja G-nek*, ha H absztrakt részcsoport a G-beli műveletekre nézve. Egy topologikus csoportok közt menő $f : G \to H$ függvény *homomorfizmus*, ha folytonos és csoporthomomorfizmus.

14. Legyen G egy topologikus tér, ami absztrakt csoport is egyben. Igazoljuk, hogy G pontosan akkor topologikus csoport, ha az $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ függvény ($x, y \in G$) folytonos.

15. Igazoljuk, hogy az alábbi csoportok a klasszikus topológiára nézve topologikus csoportok: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, $(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \cdot)$.