Bevezetés az algebrai topológiába / 2009 tavasz / Küronya Alex

4. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X, τ) topologikus tér.
   - Egy diszkrét topologikus térben pontosan a véges halmazok a kompaktak.
   - Minden (X, d) metrikus térhez és $\mathfrak{U}$ nyílt fedéshez létezik olyan legkisebb pozitív valós szám, amely a Lebesgue-lemma feltételeit kielégíti.
   - Egy T_1 topologikus tér minden részhalmaza is T_1.
   - Legyenek (X, τ),(X, σ) topologikus terek, tegyük fel, hogy $\sigma \subseteq \tau$. Ha (X, σ) kompakt, akkor (X, τ) is.
   - A kovéges topológiában minden altér kompakt.
   - X véges sok kompakt alterének az uniója is kompakt.
   - Ha $A, B \subseteq X$ diszjunkt kompakt alterek, akkor létezik olyan $U, V \subseteq X$ diszjunkt nyílt halmazpár, amelyre $A \subseteq U$ és $B \subseteq V$.
   - Egy kovéges topologikus tér pontosan akkor Hausdorff, ha diszkrét.

2. Minden $0 \leq i \leq 3$ esetén adjunk példát olyan topologikus térre, amely T_i de nem T_{i+1}.

3. Mutassuk meg, hogy egy lokálisan útösszefüggő topologikus térben minden összefüggő nyílt halmaz útösszefüggő is egyben.

4. Legyen (X, τ) kompakt topologikus tér, $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq 2^X$ zárt halmazok egy tetszőleges rendszere, amely zárt a véges metszetek képzésére nézve. Mutassuk meg, hogy ha egy $U \in \tau$ halmazra $\cap_\alpha A_\alpha \subseteq U$, akkor létezik $\alpha \in I$, amelyre $A_\alpha \subseteq U$.

5. Legyen (X, d) metrikus tér, $A \subseteq X$ tetszőleges rögzített részhalmaz. Minden $x \in X$ esetén legyen

$$d(x, A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in A} d(x, y) \ .$$

Igazoljuk, hogy az $x \mapsto d(x, A)$ függvény folytonos.

Definíció. Ha (X, d) metrikus tér, $A \subseteq X$, akkor A *átmérője:*

$$\operatorname{diam}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{d(x, y) \mid \forall x, y \in A\} \ .$$

6. (Lebesgue-lemma) Legyen (X, d) kompakt metrikus tér, $\mathfrak{U}$ X egy nyílt fedése. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan ($\mathfrak{U}$-tól függő) $\delta > 0$ pozitív valós szám, hogy minden δ-nál kisebb átmérőjű $A \subseteq X$ halmaz esetén van olyan $U \in \mathfrak{U}$ nyílt halmaz, amelyre $A \subseteq U$.

7. Ha (X, d_X), (Y, d_Y) metrikus terek, X kompakt, $f : X \to Y$ folytonos függvény, akkor lássuk be, hogy f egyenletesen folytonos[1] is egyben.

8. Legyenek (X, τ) és (X, σ) kompakt Hausdorff topologikus terek ugyanazon az X alaphalmazon. Mutassuk meg, hogy amennyiben $\sigma \subset \tau$ vagy $\tau \subset \sigma$, akkor $\sigma = \tau$.

9. * Igazoljuk, hogy tetszőleges $f, g : X \to Y$ folytonos függvények esetén ha Y Hausdorff, akkor

$$\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$$

zárt halmaz.

10. ** (Baire kategória tétele) Legyen X kompakt Hausdorff tér, $\{Y_n\}$ pedig X-beli üres belsejű zárt részhalmazok egy megszámlálható rendszere. Mutassuk meg, hogy

$$\operatorname{int} \bigcup_n Y_n = \emptyset \ .$$

---

[1] Azaz minden $\epsilon > 0$ esetén van olyan $\delta > 0$, amelyre minden $x_1, x_2 \in X$ választással

$$d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon \ .$$

11. Bizonyítsuk be, hogy egy normális tér minden zárt altere is normális.

12. Igazoljuk, hogy minden kompakt Hausdorff tér normális.

13. Lássuk be, hogy minden metrikus tér normális.

14. * Legyen (X, τ) egy normális topologikus tér, $F, G \subseteq X$ diszjunkt zárt részhalmazok. Ekkor léteznek olyan diszjunkt $U, V \subseteq X$ nyílt halmazok, amelyekre $F \subseteq U$, $G \subseteq V$, és $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

15. Igazoljuk, hogy ha $f : X \to Y$ folytonos függvény, X kompakt, Y Hausdorff, akkor f zárt leképezés.

16. ** Legyen X kompakt Hausdorff tér, $\{C_i \mid i \in I\}$ pedig X-beli összefüggő zárt halmazok egy rendszere, amely teljesen rendezett a tartalmazásra nézve. Mutassuk meg, hogy $\cap_{i \in I} C_i$ is összefüggő.