Bevezetés az algebrai topológiába / 2009 tavasz / Küronya Alex

3. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X,τ) topologikus tér.
   - Minden végtelen halmaz összefüggő a kovéges topológiára nézve.
   - Legyen (X,σ) egy másik topologikus tér az X halmazon, amelyre $\sigma \subseteq \tau$. Igaz-e, hogy ha (X,τ) összefüggő, akkor (X,σ) is? És fordítva?
   - Minden $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz összefüggő.
   - Legyen $A \subseteq X$ összefüggő altér, ekkor $\mathrm{int}_X A$ is összefüggő.
   - Egy Hausdorff topologikus tér minden altere is Hausdorff.
   - Minden kompakt metrikus térnek van megszámlálható sűrű részhalmaza.
   - Egy Hausdorff tér minden véges részhalmaza zárt.
   - Egy diszkrét topologikus térben minden összefüggő altérnek legfeljebb egy eleme van.
   - Egy triviális topologikus tér minden altere összefüggő.

Definíció. Az (X,τ) topologikus téren jelölje $\equiv$ azt az ekvivalenciarelációt, amelyre $x \equiv y$ pontosan akkor, ha $d(x) = d(y)$ minden d diszkrét értékű leképezés esetén. A $\equiv$ reláció ekvivalenciaosztályait X *kvázikomponens*einek nevezzük.

2. * (i) Mutassuk meg, hogy $\equiv$ valóban ekvivalenciareláció.
(ii) Lássuk be, hogy egy topologikus tér kvázikomponensei zártak, továbbá minden X-beli összefüggő halmaz részhalmaza egy kvázikomponensnek.
(iii) Legyen

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \{ (0,0\,\} , \{ (0,1) \,\} \,\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \tfrac{1}{n} \} \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2 \ .$$

Ekkor a $(0,0)$ és $(0,1)$ pontok komponensek, de nem kvázikomponensek.

3. Legyen (C_n) X-beli összefüggő halmazok egy végtelen sorozata, amelyre teljesül, hogy $C_n \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ is összefüggő[1].

4. (i) Mutassuk meg, hogy a $[0,1]$, $[0,1)$, és $(0,1)$ topologikus terek közt nincs két homeomorf.
(ii) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geq 2$ esetén $\mathbb{R} \not\approx \mathbb{R}^n$.

5. Lássuk be, hogy minden $f : [0,1] \to [0,1]$ leképezésnek van fixpontja (azaz olyan $x \in [0,1]$, amelyre $f(x) = x$). Vizsgáljuk meg, hogy igaz-e ez az állítás a $[0,1)$ térre.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha X egy útösszefüggő topologikus tér, $A \subseteq X$ összefüggő, akkor A útösszefüggő is.

7. **[2] Legyen R kommutatív egységelemes gyűrű, és legyen

$$\mathrm{Spec}\, R \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathfrak{p} \subseteq R \,|\, \mathfrak{p} \text{ prímideál } R\text{-ben } \} \ .$$

Egy $I \subseteq R$ ideálra tekintsük a

$$V(I) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \,|\, \mathfrak{p} \supseteq I \}$$

halmazt.

Igazoljuk, hogy a $V(I)$ alakú halmazok (ahol I végigfut R ideáljain) egy topológia zárt halmazait alkotják. Ezt a topológiát a $\mathrm{Spec}\, R$ halmazon definiált *Zariski-topológiának* nevezik, a $\mathrm{Spec}\, R$-t pedig az R gyűrű *spektrumának*. Írjuk le a Zariski-topológiát az $R = \mathbb{C}[x]$ és $R = \mathbb{Z}$ esetekben.

8. ** Lássuk be, hogy tetszőleges kommutatív egységelemes R gyűrű esetén $\mathrm{Spec}\, R$ kompakt a Zariski-topológiára nézve..

9. Mutassuk meg, hogy ha egy X topologikus térben van megszámlálható sűrű halmaz, akkor minden $\mathfrak{U} \subseteq \tau$ halmazrendszer, ami páronként diszjunkt halmazokból áll, szintén megszámlálható.

---

[1] Az X-ről örökölt altértopológiára nézve.

[2] Ezt a feladatot legyenek szívesek csak azok beadni, akik *nem* jártak korábban a "Kommutatív algebra és algebrai geometria" c. előadásra.

10. Tekintsük a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát a kovéges topológiával. Mely pont(ok)hoz konvergál az $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}$ sorozat?

Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $f : X \to X$ függvényt *izometriá*nak hívunk, ha minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \ .$$

Egy $f : X \to X$ függvény *kontrakció*, ha létezik olyan $c > 0$ valós szám, amelyre minden $x, y \in X$ esetén

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) \ .$$

11. * Mutassuk meg, hogy ha $f : X \to X$ egy kompakt metrikus tér izometriája, akkor f homeomorfizmus. Igazoljuk példával, hogy nem feltétlenül kompakt metrikus terekre nem igaz az állítás.

12. Bizonyítsuk be, hogy egy kompakt metrikus téren értelmezett kontrakciónak mindig van fixpontja.

13. ** (Kuratowski-probléma) Legyen X egy topologikus tér, ekkor az $A \mapsto \overline{A}$ és az $A \mapsto X - A$ műveletek a 2^X halmaznak önmagára való halmazleképezései. Mutassuk meg, hogy az iménti lépésekkel egy adott $A \subseteq X$ részhalmazból legfeljebb 14 különböző X-beli részhalmazt kaphatunk meg. Adjunk meg egy olyan $\mathbb{R}$-beli alteret (a klasszikus topológiára nézve), amelyre elérjük a 14-et.

14. ** Ha egy $X \neq \emptyset$ kompakt Hausdorff térnek nincsen izolált pontja, akkor X nem megszámlálható.