Bevezetés az algebrai topológiába / 2009 tavasz / Küronya Alex

2. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat. Minden esetben (X,τ) topologikus tér.
   - Legyenek $A \subseteq B \subseteq X$ részhalmazok. Ekkor $\tau|_A = (\tau|_B)|_A$. Ha A zárt B-ben, B zárt X-ben, akkor A zárt X-ben is.
   - Egy $f : X \to Y$ topologikus terek közti függvény pontosan akkor folytonos, ha minden $A \subseteq X$ részhalmazra $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.
   - Ha $f : X \to Y$ leképezés, $A \subseteq X$ tetszőleges altér akkor az $f|_A : A \longrightarrow Y$, $f|_A(x) = f(x)$ (ha $x \in A$) definícióval adott függvény folytonos.
   - Legyen Y topologikus tér, $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y$ alterek, $f : X \to Y_2$ folytonos függvény. Ekkor f mint $X \to Y$ függvény szintén folytonos. Ha $f(X) \subseteq Y_1$, akkor f mint X-ből Y_1-be menő függvény ismét csak folytonos.
   - Folytonos függvények kompozíciója folytonos.
   - $A \subseteq X$ akkor és csak akkor nyílt, ha $A = \text{int}(A)$; A pontosan akkor zárt, ha $\overline{A} = A$.
   - Legyen $f : X \to Y$ topologikus terek közt menő függvény, $\mathcal{S}$ pedig Y egy szubbázisa. Ekkor f akkor és csak akkor folytonos, ha minden $U \in \mathcal{S}$-re $f^{-1}(U) \subseteq X$ nyílt halmaz.
   - Az $[x,y)$ és $(x,y]$ típusú halmazok (ahol $x, y \in \mathbb{R}$) által generált topológia $\mathbb{R}$-en a diszkrét topológia.
   - Tetszőleges végtelen topologikus tér összefüggő a ko-véges topológiára nézve.

2. Legyen (X,τ) topologikus, (Y,d) metrikus tér, $f_n : X \to Y$ folytonos függvények egy sorozata. Mutassuk meg, hogy amennyiben f_n egyenletesen konvergál[1] egy $f : X \to Y$ függvényhez, akkor f folytonos.

3. Legyen $A \subseteq X$ egy (X,d) metrikus tér egy tetszőleges részhalmaza. Igazoljuk, hogy $\overline{A} =$ A-beli sorozatok határpontjainak a halmazával.

4. * Bizonyítsuk be, hogy véges sok seholsem sűrű halmaz uniója seholsem sűrű.

5. Egy $f : X \to Y$ topologikus terek közti függvény pontosan akkor folytonos, ha X-nek létezik olyan $\{U_i \mid i \in I\}$ nyílt halmazokból álló fedése, amelyre
$$f|_{U_i} : U_i \longrightarrow Y$$
folytonos minden $i \in I$ esetén.

6. Legyen (X,τ) topologikus tér, $A, B \subseteq X$ tetszőleges részhalmazok. Igazoljuk az alábbi állításokat.
   (1) $\text{int}(A) = \{\, x \in X \mid \exists U \subseteq X \text{ nyílt, amelyre } x \in U \subseteq A \,\}$.
   (2) $\overline{A} = \{\, x \in X \mid \exists U \subseteq X \text{ nyílt, amelyre } U \cap A = \emptyset \,\}$.
   (3) $X - \text{int}(A) = \overline{X - A}$, és $X - \overline{A} = \text{int}(X - A)$.
   (4) $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \text{int}(A \cap B)$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
   (5)
$$\bigcap_{\alpha \in I} \text{int}(A_\alpha) \supseteq \text{int}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right) = \text{int}\left(\bigcap_{\alpha \in I} \text{int}(A_\alpha)\right) \quad , \quad \bigcup_{\alpha \in I} \text{int}(A_\alpha) \subseteq \text{int}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right) \; .$$
   (6) Ha $A \subseteq B$ akkor $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$ és $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

7. Mutassuk meg, hogy egy (X,d) metrikus térben pontosan akkor van τ_d-nek megszámlálható bázisa, ha van X-ben megszámlálható sűrű halmaz.

8. Legyen X topologikus tér, $X = A \cup B$, ahol $A, B \subseteq X$ zárt részhalmazok; legyenek adva továbbá $f : A \to Y$,$g : B \to Y$ folytonos függvények (Y topologikus tér). Ha minden $x \in A \cap B$ esetén $f(x) = g(x)$, akkor létezik olyan $h : X \to Y$ folytonos függvény, amelyre $f|_A = g$ és $f|_B = g$.

9. Egy topologikus teret *teljesen összefüggéstelen*-nek hívunk, ha csak az egyelemű részhalmazai összefüggőek. Igazoljuk, hogy minden diszkrét topologikus tér teljesen összefüggéstelen. Igaz-e ennek az állításnak a megfordítása?

---

[1]vagyis minden $\epsilon > 0$ esetén létezik N_ϵ természetes szám, hogy $\forall x \in X$-re $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ amennyiben $n > N_\epsilon$.

10. (i) * Egy (X,τ) topologikus teret *irreducibilis*-nek hívunk, ha minden olyan esetben, amikor $X = F \cup G$, $F, G \subseteq X$ zárt, $X = F$ vagy $X = G$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ha X irreducibilis, $\emptyset \neq U \subseteq X$ nyílt, akkor U is irreducibilis (az altértopológiára nézve).
(ii) Az X topologius tér *noether*, ha zárt halmazok minden leszálló lánca véges sok lépésben stabilizálódik. Igazoljuk, hogy egy X noether topologikus tér kifejezhető

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_r \ ,$$

alakban, ahol minden $1 \leq i \leq r$-re $X_i \subseteq X$ irreducibilis zárt halmazok, és semelyik kettő nem tartalmazza egymást. Bizonyítsuk be, hogy a fenti felbontás a tagok átrendezésétől eltekintve egyértelmű.
(iii) Lássuk be, hogy $\mathbb{R}$ a ko-véges topológiával egy irreducibilis noether topologikus tér.

11. * Legyen $A \subseteq X$ tetszőleges, $C \subseteq X$ összefüggő altér. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \cap C \neq \emptyset$ és $(X - A) \cap C \neq \emptyset$, akkor $\partial A \neq \emptyset$.

Definíció. Legyen $p \in \mathbb{Z}$ prím, $x \in \mathbb{Z} - \{0\}$, ekkor

$$\mathrm{ord}_p(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{a legnagyobb } k \text{ egész, amelyre } p^k | x & \text{ha } x \neq 0 \\ \infty & \text{ha } x = 0 \ . \end{cases}$$

Ha $\alpha = \dfrac{x}{y} \in \mathbb{Q}^\times$, akkor legyen

$$\mathrm{ord}_p(\alpha) \ = \ \mathrm{ord}_p(\frac{x}{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{ord}_p(x) - \mathrm{ord}_p(y) \ .$$

12. Igazoljuk, hogy $\mathrm{ord}_p(\alpha)$ jóldefiniált. Mutassuk meg, hogy minden $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén
   (1) $\mathrm{ord}_p(xy) = \mathrm{ord}_p(x) + \mathrm{ord}_p(y)$
   (2) $\mathrm{ord}_p(x + y) \geq \min\{\mathrm{ord}_p(x), \mathrm{ord}_p(y)\}$, ahol egyenlőség pontosan akkor áll, ha $\mathrm{ord}_p(x) \neq \mathrm{ord}_p(y)$.

Számoljuk ki a p-adikus rendjét az $5, 100, 24, -\frac{1}{48}, -\frac{12}{28}$ számoknak a $p = 2, 3, 5$ esetekben.

Definíció. Megtartva eddigi jelöléseinket, legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Ekkor

$$d_p(\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } \alpha = \beta \ , \\ \frac{1}{p^{\mathrm{ord}_p(\alpha-\beta)}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

az α *és* β *számok p-adikus távolsága.*

13. Mutassuk meg, hogy $(\mathbb{Q}, d_p)$ metrikus tér, amely *nem-arkhimédeszi*, azaz minden $x, y, z \in \mathbb{Q}$ esetén

$$d_p(x,y) \leq \max\{d_p(x,z), d_p(z,y)\} \ .$$

Bizonyítsuk be, hogy $(\mathbb{Q}, d_p)$-ben minden háromszög egyenlő szárú.

14. ** Adjunk meg olyan $U \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazt (a klasszikus topológiára nézve), amelyre $U \neq \mathrm{int}\,\overline{U}$.