Bevezetés az algebrai topológiába / 2009 tavasz / Küronya Alex

## 1. Házi feladat

1. *Ellenőrző kérdések*: bizonyítsuk be/cáfoljuk meg az alábbiakat.
   - Minden diszkrét topologikus térbe menő függvény folytonos.
   - Minden triviális topologikus téren értelmezett függvény folytonos.
   - Legyen $X$ tetszőleges halmaz,
   $$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{A \subseteq X \mid |X - A| \text{ véges }\} \ .$$
   Ekkor $(X, \tau)$ egy topologikus tér.
   - Tetszőleges $X$ halmaz és $x \in X$ elem esetén a
   $$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \{A \subseteq X \mid x \in A\}$$
   választással $(X, \tau)$ topologikus tér.
   - Legyen $(X, \tau)$ tetszőleges topologikus tér; ekkor véges sok zárt halmaz uniója zárt, továbbá tetszőlegesen sok zárt halmaz metszete is zárt.
   - Egy $f : X \to Y$ topologikus terek közti függveny pontosan akkor folytonos az $x \in X$ pontban, ha $f(x)$ minden környezetének inverz képe $x$ egy környezete.

2. * Legyenek $\alpha, \beta, \gamma$ tetszőleges valós számok. Mutassuk meg, hogy az ún. *nyílt féltér*
$$H \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x + \beta y + \gamma z > 0\right\}$$
valóban nyílt részhalmaza az euklideszi térnek.

3. Adjunk meg végtelen sok $\mathbb{R}$-beli nyílt halmazt, amelyek metszete ($i$) nyílt ($ii$) zárt ($iii$) se nem nyílt se nem zárt.

4. Igazoljuk, hogy a
$$D(x, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| \leq \delta\}$$
ún. *zárt gömb* valóban zárt halmaz $\mathbb{R}^n$-ben.

5. Bizonyítsuk be, hogy
$$d_1(f, g) = \int_{[a,b]} |f - g| dx$$
metrika a folytonos függvények $\mathcal{C}[a, b]$ halmazán. Igaz marad-e ez az állítást, ha a folytonos függvények helyett Riemann-integrálhatókat tekintünk?

6. ** Hány páronként nem-homeomorf topológia adható meg egy kételemű halmazon? És egy háromeleműn?

7. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ a klasszikus topológiával valóban topologikus tér.

8. Legyen $(X, d)$ metrikus tér, $x, y \in X$ esetén legyen
$$d_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} d(x, y) & \text{, ha } d(x, y) \leq 1 \\ 1 & \text{, ha } d(x, y) > 1 \ . \end{cases}$$
Mutassuk meg, hogy $(X, d_1)$ szintén metrikus tér, továbbá $d$ és $d_1$ ugyanazt a topológiát adja $X$-en.

9. * Igazoljuk, hogy egy $(X, d)$ metrikus térbeli $U$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha minden $u \in U$ esetén létezik olyan $\epsilon_u > 0$ valós szám, amelyre
$$\mathbb{B}(u, \epsilon_u) \subseteq U \ .$$