6. Házi feladat

1. Legyen $V = \mathbb{Q}^2$, tekintsük az $\alpha, \beta : V \to V$ lineáris leképezéseket, amelyek az $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ rendezett bázisban az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \ \beta = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixokkal vannak adva. Adjuk meg az $\alpha \otimes \beta$ és a $\beta \otimes \alpha$ leképezések mátrixait az $e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2$ rendezett bázisra nézve.

2. * Legyen V egy véges-dimenziós k-vektortér, k tetszőleges test, $v_1, \ldots, v_n$ egy rögzített bázis. Mutassuk meg, hogy $\sum_{1 \le i,j \le n} \alpha_{ij} v_i \otimes v_j \in V \otimes V$ pontosan akkor elemi tenzor (azaz írható $u \otimes w$ alakba, ahol $u, w \in V$), ha minden $1 \le i,j,k,l \le n$ indexkombinációra $\alpha_{ij}\alpha_{kl} = \alpha_{il}\alpha_{kj}$.

3. * Igazoljuk a tenzorszorzat alábbi alapvető tulajdonságait.
(i) Ha $(m,n) = 1$ természetes számok, akkor $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$.
(ii) Tetszőleges R gyűrű esetén $R \otimes_R R \simeq R$.
(iii) Határozzuk meg a $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tenzorszorzatot.
(iv) Legyen R tetszszőleges gyűrű, $I \lhd R$, M R-modulus. Ekkor

$$(R/I) \otimes_R M \simeq M/IM \ .$$

(v) Igazoljuk a Nakayama-lemma segítségével, hogy ha R lokális gyűrű, M,N végesen generált R-modulusok, akkor amennyiben $M \otimes_R N = 0$, úgy $M = 0$ vagy $N = 0$.
(vi) Legyenek $I, J \subseteq R$ ideálok. Ekkor

$$R/I \otimes_R R/J \simeq R/(I+J) \ .$$

(vii) Tetszőleges k test esetén

$$k[x_1, \ldots, x_m] \otimes_k k[y_1, \ldots, y_n] \simeq k[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n] \ .$$

Definíció. Egy M R-modulust *lapos*nak nevezünk, ha az $M \otimes_R$ funktor egzakt, azaz R-modulusok minden $0 \to A \to B \to C \to 0$ rövid egzakt sorozatára a

$$0 \to M \otimes_R A \to M \otimes_R B \to M \otimes_R C \to 0$$

sorozat is egzakt.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges R gyűrű felett minden projektív modulus lapos.

5. Mutassuk meg, hogy egy M R-modulusra az alábbi állítások ekvivalensek.
   (1) M lapos R-modulus.
   (2) Ha $f : M \to M'$ injektív R-modulus-homomorfizmus, akkor $f \otimes \mathrm{Id} : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N$ szintén injektív.
   (3) A T_N: $M \to M \otimes_R N, f \to f \otimes \mathrm{Id}$ funktor egzakt sorozatokat egzakt sorozatokba visz.
   (4) Ha $f : M \to M'$ végesen generált R-modulusok közti injektív R-modulus-homomorfizmus, akkor $f \otimes \mathrm{Id} : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N$ szintén injektív.

6. *(Leképezés fibruma) Legyen $f : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, $P \in \operatorname{Spec} R$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{Spec}(S \otimes_R \kappa(P)) \approx (f^{\#})^{-1}(P) \ ,$$

ahol $R \to \kappa(P)$ a P prímideál maradéktestjébe menő természetes homomorfizmus és $f^{\#} : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ a spektrumokon indukált folytonos leképezés.

7. * (Lokalizáció és tenzorszorzat) Legyenek M, N tetszőleges R-modulusok, $S \subseteq R$ multiplikatív rendszer, $P \in \operatorname{Spec} R$.
(i) Mutassuk meg, hogy létezik pontosan egy

$$f : S^{-1}R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$$

izomorfizmus, amelyre minden $r \in R, s \in S, m \in M$ esetén

$$f((r/s) \otimes m) = (am)/s \ .$$

(ii) Igazoljuk, hogy létezik pontosan egy

$$g : S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \xrightarrow{\sim} S^{-1}(M \otimes_R N)$$

$S^{-1}R$-modulus-izomorfizmus, amelyre minden $m \in M, n \in N, s, t \in S$ esetén

$$f((m/s) \otimes (n/t)) = (m \otimes n)/(st) \ .$$

Speciálisan $M_P \otimes_{R_P} N_P \simeq (M \otimes_R N)_P$.

8. Legyenek M, N, P R-modulusok. Mutassuk meg, hogy minden alábbi esetben létezik pontosan egy izomorfizmus az előírt tulajdonsággal.

(1) $M \otimes_R N \to N \otimes_R M$, $x \otimes y \mapsto y \otimes x$,
(2) $(M \otimes_R N) \otimes_R P \to M \otimes_R (N \otimes_R P)$. $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$,
(3) $R \otimes_R M \to M$, $a \otimes x \to ax$,
(4) $(M \oplus N) \otimes_R P \to (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$, $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$.

9. (i) Legyen $(M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ R-modulusok egy családja, $M \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$. Igazoljuk, hogy M pontosan akkor lapos, ha minden $\lambda \in \Lambda$ esetén M_λ lapos.
(ii) Lássuk be, hogy tetszőleges R gyűrű esetén az $R[x]$ egyváltozós polinomgyűrű lapos R-algebra.

10. * Mutassuk meg, hogy a laposság lokális tulajdonság, azaz egy M R-modulus pontosan akkor lapos, ha minden $P \in \operatorname{Spec} R$ esetén M_P lapos, továbbá ezen túlmenve a laposságot elég maximális ideáloknál vett lokalizáltakon tesztelni.

11. Legyenek V, W véges-dimenziós k-vektorterek, és tekintsük a

$$V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_k(V, W)$$

természetes izomorfizmust. Bizonyítsuk be, hogy egy $x \in V^* \otimes W$ tenzor pontosan akkor írható fel k darab elemi tenzor összegeként, ha a természetes izomorfizmusban neki megfelelő $\phi_x \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$ lineáris leképezés rangja k.