5. Házi feladat

1. A $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ sorozat pontosan akkor egzakt, ha f injektív, g szürjektív, és g egy $\bar{g} : \operatorname{Coker} f \stackrel{\text{def}}{=} M/\operatorname{im} f \to M''$ izomorfizmust indukál.

2. * (i) Legyen $M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0$ R-modulusok egy sorozata. Mutassuk meg, hogy ez pontosan akkor egzakt, ha minden N R-modulusra

$$0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M', N)$$

egzakt.
* (ii) Igazoljuk, hogy R-modulusok egy $0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ sorozata pontosan akkor egzakt, ha minden M R-modulusra

$$0 \to \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N'')$$

egzakt.

Definíció. Legyen $\mathcal{C}$ R-modulusok egy osztálya, $\lambda : \mathcal{C} \to \mathbb{Z}$ egy függvény. Azt mondjuk, hogy λ *additív*, ha minden olyan $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ rövid egzakt sorozatra, amelynek mindhárom tagja $\mathcal{C}$-beli,

$$\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') \ .$$

3. (i) Ellenőrizzük, hogy ha $R = k$ test, $\mathcal{C}$ a véges-dimenziós k-vektorterekből áll, akkor $V \mapsto \dim_k V$ additív függvénye $\mathcal{C}$-n.
(ii) Legyen $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$ R-modulusok egzakt sorozata, úgy, hogy a sorozat minden tagja, továbbá a szereplő összes homomorfizmus magja is $\mathcal{C}$-beli. Igazoljuk, hogy ha λ additív függvény $\mathcal{C}$-n, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) \ = \ 0 \ .$$

4. (i) Ha $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ R-modulusok rövid egzakt sorozata, amelyben M' és M'' végesen generált R felett, akkor M is.
(ii) Legyenek M_1, M_2 egy adott M R-modulus részmodulusai. Igazoljuk, hogy ha $M_1 \cap M_2$ és $M_1 + M_2$ végesen generált R-modulusok, akkor M_1 és M_2 is.

5. * (i) Legyen R egy lokális gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges m, n természetes számokra $R^m \simeq R^n$ mint R-modulusok pontosan akkor teljesül, ha $m = n$.
* (ii) Igazoljuk az előbbi állítást arra az esetre, ha R tetszőleges kommutatív gyűrű.
** (iii) Igaz marad-e az (i) rész állítása abban az esetben, ha R nem feltétlenül kommutatív gyűrű?
(iv) Mutassuk meg, hogy ha $\phi : R^m \to R^n$ szürjektív, akkor $m \geq n$.
(v) Előfordulhat-e, hogy $\phi : R^m \to R^n$ injektív, de $m > n$?

6. Mutassuk meg, hogy ha $I \subseteq R$ egy végesen generált idempotens ideál (azaz $I^2 = I$), akkor I generálható egyetlen idempotens elemmel.

7. * (Cayley–Hamilton-tétel) Legyen R tetszőleges gyűrű, M végesen generált szabad R-modulus. Igazoljuk, hogy minden $\phi \in \operatorname{End}_R(M)$ endomorfizmus kielégíti a karakterisztikus polinomját.

8. ** Legyen $X = \operatorname{Spec} R$, $f \in R$, $D_f \subseteq \operatorname{Spec} R$ az f által meghatározott nyílt halmaz. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{O}_X(D_f) \simeq R_f \ .$$

9. Legyen $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ egy rövid egzakt sorozat. Igazoljuk, hogy az alábbiak ekvivalensek:
(i) Létezik egy $M' \to M' \oplus M''$ izomorfizmus, amelyre nézve $f(m) = (m, 0)$ és $g(m', m'') = m''$.
(ii) Létezik egy olyan $s : M'' \to M$ homomorfizmus, amelyre $g \circ s = \mathrm{Id}_{M''}$.
(iii) Létezik egy olyan $r : M \to M'$ homomorfizmus, amelyre $r \circ f = \mathrm{Id}_{M'}$.
Ha a fenti feltételek teljesülnek, akkor a fenti rövid egzakt sorozatot *felhasadó egzakt sorozat*nak hívjuk.

Bizonyítsuk be, hogy ha $R = k$ test, akkor minden rövid egzakt sorozat felhasadó.