Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2007 tavasz / Küronya Alex

4. Házi feladat

1.* (i) Minden $P \subseteq R$ prímideál tartalmaz egy minimális prímideált.
* (ii) Legyen R olyan gyűrű, ami tartalmaz nemnulla nullosztót. Mutassuk meg, hogy vagy van R-ben nemnulla nilpotens elem, vagy R-nek legalább kettő minimális prímideálja van.
* (iii) Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{(0)} = \bigcap_{P \in SpecR} P \text{ , illetve, hogy } \sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P \text{ ,}$$

ahol $I \subseteq R$ tetszőleges ideál.

2. Bizonyítsuk be, hogy $k[x]_{(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ h \in k(x) \,|\, h = \frac{f}{g}, f, g \in k[x], x \not| g \right\}$, illetve $k[[x]]$ lokális gyűrűk.

3. Egy R gyűrű pontosan akkor redukált, ha izomorf testek egy szorzatának egy részgyűrűjével.

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $S \subseteq R$ multiplikatív halmaz esetén az $R \to S^{-1}R$ lokalizáció-leképezés epimorfizmus a kommutatív gyűrűk kategóriájában.

5. ** Legyenek R,S gyűrűk, amelyekre $R[x] \simeq S[y]$. Igaz-e, hogy $R \simeq S$?

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $f \in R$ esetén $R_f \simeq R[X]/(Xf - 1)$.

7. Soroljuk fel az összes $\mathbb{Z} \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$ köztes gyűrűt.

8. * Bizonyítsuk be, hogy ha $\phi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, $a \in R$, $I \subseteq R$ ideál, akkor
   (1) $(\phi^*)^{-1}(D_a) = D_{\phi(a)}$,
   (2) $(\phi^*)^{-1}(V(I)) = V(S\phi(I))$,
   (3) $\phi^*(\operatorname{Spec} S) \subseteq \operatorname{Spec} R$ pontosan akkor sűrű, ha $\ker \phi \subseteq \sqrt{(0)}$,
   (4) ha ϕ szürjektív, akkor ϕ^* homeomorf módon képezi le a $\operatorname{Spec} S$ teret a $V(\ker \phi) \subseteq \operatorname{Spec} R$ zárt halmazra.

Adjunk példát olyan ϕ homomorfizmusra, amelyre ϕ^* bijektív, de nem homeomorfizmus.

9. Mutassuk meg, hogy ha R Boole-gyűrű, akkor $\operatorname{Spec} R$ kompakt Hausdorff tér.

10. Legyen R gyűrű, $S, T \subseteq R$ multiplikatív halmazok, jelölje továbbá U a T halmaz képét $S^{-1}R$-ben. Igazoljuk, hogy

$$(ST)^{-1}R \simeq U^{-1}(S^{-1}) \text{ .}$$

Definíció. Gyűrű egy bizonyos X tulajdonságát *lokális*nak hívjuk, ha X pontosan akkor igaz egy R gyűrűre, ha minden R_P ($P \in \operatorname{Spec} R$) lokalizáltjára igaz.

11. Mutassuk meg, hogy 'redukáltnak lenni' lokális tulajdonság, de 'integritási tartománynak lenni' nem.

12. ** Legyen X kompakt Hausdorff topologikus tér, jelölje $C(X)$ az X-en értelmezett valós értékű folytonos függvények gyűrűjét a pontonkénti műveletekkel. Tetszőleges $x \in X$ esetén legyen

$$\mathfrak{m}_x \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in C(X) \,|\, f(x) = 0 \}$$

az x ponthoz tartozó maximális ideál. Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{aligned} \mu : X &\longrightarrow \text{m-Spec}\, C(X) \\ x &\mapsto \mathfrak{m}_x \end{aligned}$$

függvény homeomorfizmus (tehát egyebek közt igaz az, hogy helyre lehet állítani X-et $C(X)$-ből).