

## 2. HÁZI FELADAT

1. \* Legyen  $C \stackrel{\text{def}}{=} V(y^2 = x^2 + x^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$ .
  - (1)  $C$  mely pontjaiban lesz a  $t = \frac{y}{x}$  racionális függvény reguláris? Mutassuk meg, hogy  $\frac{y}{x} \notin k[C]$ .
  - (2) Lássuk be, hogy minden  $t \in k(C)$  egyértelműen írható  $a(x) + b(x)y$  alakba, ahol  $a, b \in k(x)$ .
2. Bontsuk fel irreducibilis komponenseire az  $X \stackrel{\text{def}}{=} V(y^2 - xz, z^2 - y^3) \subseteq \mathbb{A}_k^3$  algebrai halmazt. Igazoljuk, hogy minden irreducibilis komponense biracionális az affin egyenessel.
3. \* Bizonyítsuk be, hogy két irreducibilis algebrai halmaz szorzata is irreducibilis.
4. Mutassuk meg, hogy  $\mathbb{A}_k^2$  és  $\mathbb{A}_k^1 \times \mathbb{A}_k^1$  nem homeomorfak, mindkét esetben a Zariski-topológiát feltételezve.
5. Határozzuk meg a  $\mathbb{Z}[x]$  egyváltozós polinomgyűrű összes prímeálját.
6. Legyenek  $R, S$  gyűrűk. Lássuk be, hogy a  $\psi : R[x] \rightarrow S$  homomorfizmusok bijektív megfeleltetésben állnak  $S$  elemeivel.
7. Egy tetszőleges  $k$  test esetén az  $R = k[x]$  gyűrű egy  $k$ -automorfizmusa az  $R$  olyan automorfizmusa, amely  $k$  elemeit elemenként fixen hagyja. Jelölés:  $\text{Aut}_k R$ .
  - (1) Határozzuk meg az  $\text{Aut}_k R$  gyűrűt.
  - (2) Írjuk le a  $k(x)$  test  $k$ -automorfizmusait.
8. Adjunk példát olyan  $R$  gyűrűre és  $I, J \subseteq R$  ideálokra, amelyekre  $IJ \neq I \cap J$ .
9. Bizonyítsuk be vagy cáfoljuk meg az alábbi állításokat.
  - (1) Két prímeál metszete prímeál.
  - (2) Ha  $P, Q$  prímeálok, akkor  $P + Q$  is az.
  - (3) Ha  $\phi : R \rightarrow S$  egy gyűrűhomomorfizmus,  $\mathfrak{m} \subseteq S$  egy maximális ideál, akkor  $\phi^{-1}(\mathfrak{m}) \subseteq R$  szintén maximális ideál.
  - (4) Egy tetszőleges  $\phi : R \rightarrow S$  gyűrűhomomorfizmus esetén minden prímeál inverz képe prímeál.
10. Adjunk példát végtelen-dimenziós Noether-féle topologikus térre.
11. Legyen  $X$  tetszőleges topologikus tér,  $Y \subseteq X$  egy altér.
  - (1) Igazoljuk, hogy  $Y$  pontosan akkor irreducibilis, ha  $\overline{Y}$  ( $Y$ -nak az  $X$ -ben vett lezártja) irreducibilis.
  - (2) Mutassuk meg, hogy  $Y$  pontosan akkor összefüggő, ha minden  $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$  halmaz összefüggő.