Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2014 ősz / Küronya Alex

1. Házi feladat

Beadási határidő: December 8.

A csillaggal megjelölt feladatokat kell beadni. A kétcsillagos feladatok a szokásosnál nehezebbnek számítanak.

1. Legyen $P \in C \stackrel{\text{def}}{=} V(f) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ sima pont. Azt mondjuk, hogy P a C görbe inflexiós pontja, ha a P pontbeli ℓ érintőegyenesre $\operatorname{ord}^f_P(\ell) \geq 3$.

(1) Legyen $C \stackrel{\text{def}}{=} V(y - x^n)$ ahol n pozitív egész. Milyen n értékekre lesz P inflexiós pont a C görbén?

(2) Legyen $C \stackrel{\text{def}}{=} V(y + ax^2 +$ magasabbfokú tagok$)$. Mutassuk meg, hogy $(0,0)$ pontosan akkor lesz C inflexiós pontja, ha $a = 0$.

2. Legyen $(R, \mathfrak{m})$ DVR K hányadostesttel. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha \in K \setminus R$, akkor $\alpha^{-1} \in \mathfrak{m}$.

3. Legyen $p \in \mathbb{Z}$ prímszám, továbbá

$$\mathbb{Z}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha = \frac{a}{b}, \text{ ahol } a \text{ és } b \text{ egészek, és } p \not| b\} \ .$$

(1) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}_p$ DVR $\mathbb{Q}$ hányadostesttel.

(2) Igazoljuk, hogy minden olyan R DVR, amelynek $\mathbb{Q}$ a hányadostestje, izomorf a fentiek egyikével.

4. Legyen K tetszőleges test. Egy K-n értelmezett *rend-függvény* egy olyan $\phi\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ függvény, amelyre teljesülnek az alábbiak: Minden $a, b \in K$ esetén

(1) $\phi(a) = \infty$ if and only if $a = 0$,

(2) $\phi(ab) = \phi(a) + \phi(b)$,

(3) $\phi(a + b) \geq \min\{\phi(a), \phi(b)\}$.

Igazoljuk az alábbi állításokat.

(1) Az $R \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in K \mid \phi(\alpha) \geq 0\}$ egy DVR $\mathfrak{m} = \{\alpha \in K \mid \phi(\alpha) > 0\}$ maximális ideállal és K hányadostesttel.

(2) Adott $(R, \mathfrak{m}, K)$ DVR esetén a $\operatorname{ord}_R\colon K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ függvény rend-függvény a fenti értelemben.

5. Tetszőleges k test esetén számítsuk ki a

$$\dim_k k[x_1, \dots, x_n]/(x_1, \dots, x_n)^r$$

értéket mint n és r függvényét.

6. Tetszőleges k test esetén igazoljuk, hogy $k[[x]]$ DVR x uniformizáló paraméterrel.

7. Let $(R, \mathfrak{m}, K)$ be a DVR, ord a hozzá tartozó rend-függvény. Ellenőrizzük az alábbiakat.

(1) Minden $\alpha, \beta \in K$, $\operatorname{ord}(\alpha) < \operatorname{ord}(\beta)$ esetén $\operatorname{ord}(\alpha + \beta) = \beta$.

(2) Ha $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$, és létezik $1 \leq i \leq r$, amelyre $\operatorname{ord}(\alpha_i) < \operatorname{ord}(\alpha_j)$ minden $j \neq i$ esetén, akkor

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \neq 0 \ .$$

8. Legyen R tetszőleges gyűrű, $\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in R[[t]]$ formális hatványsor. Igazoljuk, hogy α pontosan akkor lesz egység $R[[t]]$-ben, ha $a_0 \in R^{\times}$.

9. Legyen R egy integritási tartomány K hányadostesttel. Azt mondjuk, hogy R K *egy értékelési gyűrűje*, ha minden $\alpha \in K^\times$ esetén legalább $\alpha \in R$ vagy $\alpha^{-1} \in R$ teljesül. Legyen R és K mint fent.

(1) Igazoljuk, hogy R lokális gyűrű.
(2) Mutassuk meg, hogy ha R' integritási tartomány, $R \subseteq R' \subseteq K$, akkor R' is értékelési gyűrűje K-nak.

10. * + * Legyen k tetszőleges test, $C \subseteq \mathbb{A}_k^2$ irreducibilis affin varietás, $P \in C$ egy pont. Igazoljuk az $\mathcal{O}_{C,P}$ lokális gyűrűre vonatkozó alábbi állításokat.

(1) Legyen $t \in \mathcal{O}_{C,P}$ uniformizáló paraméter, $\alpha \in R$ tetszőleges. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén léteznek egyértelműen meghatározott $a_0, \ldots, a_n \in k$ és $\alpha_n \in \mathcal{O}_{C,P}$ elemek, amelyekre
$$\alpha = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \alpha_n t^{n+1} .$$
(2) Igazoljuk, hogy a fenti konstrukció egy injektív
$$\begin{aligned} \iota\colon \mathcal{O}_{C,P} &\longrightarrow k[[x]] \\ \alpha &\mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \end{aligned}$$
k-algebra-homomorfizmust ad, amit α-nak a t szerinti formális hatványsorfejtésének nevezünk.
(3) A fenti homomorfizmus kiterjed egy injektív $\mathcal{O}_{C,P} \hookrightarrow k((x))$ homomorfizmussá, ahol $k((x))$ a $k[[x]]$ integritási tartomány hányadostestje.
(4) Legyen C az affin egyenes, $P \in C$ az origó. Válasszunk egy t uniformizáló paramétert, és adjuk meg az $\frac{1}{t-1}$ elem szerinte vett formális hatványsorfejtését.