Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2014 ősz / Küronya Alex

1. Házi feladat

Beadási határidő: November 24.

A csillaggal megjelölt feladatokat kell beadni. A kétcsillagos feladatok a szokásosnál nehezebbnek számítanak.

1. Legyen k tetszőleges test. Igazoljuk, hogy

$$\dim_k k[x,y]/(x,y)^r = \binom{r+1}{2}.$$

2. Legyen k algebrailag zárt test, $I \lhd k[x_1,\ldots,x_n]$ egy ideál, amelyre $V(I) = \{P_1,\ldots,P_m\}$ egy véges halmaz. Jelölje

$$\mathcal{O}_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,P_i} ,$$

és igazoljuk az alábbiakat.

(1) $k[x_1,\ldots,x_n]/I \simeq \prod_{i=1}^m \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$.
(2) $\dim_k k[x_1,\ldots,x_n]/I = \sum_{i=1}^m \dim_k \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$.
(3) Ha $V(I)$ egyetlen P pontból áll, akkor

$$k[x_1,\ldots,x_n]/I \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,P}/I\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,P} .$$

3. Legyen M tetszőleges abel-csoport. Igazoljuk, hogy egy R-modulus struktúra M-en nem más, mint egy $R \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,M)$ gyűrűhomomorfizmus.

4. Legyen $0 \to V_1 \to \ldots \to V_n \to 0$ k-vektorterek egy egzakt sorozata. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim_k V_i = 0 .$$

5. Legyenek M, M' R-modulusok; bizonyítsuk be, hogy a $\mathrm{Hom}_(M,M')$ halmazon adott egy természetes R-modulusstrukúra.

6. * Legyen M R-modulus, $N \leq M$.

(1) Ellenőrizzük, hogy az M/N csoporton a $r\cdot\overline{m} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{rm}$ hozzárendeléssel megadott R-modulus-struktúra jóldefiniált.
(2) Mutassuk meg, hogy a $\pi\colon M \to M/N$ függvény egy szürjektív R-homomorfizmus.
(3) (A faktormodulus univerzális tulajdonsága) Tegyük fel, hogy $\phi\colon M \to M'$ olyan R-modulus-homomorfizmus, amelyre $\phi(N) = 0$. Lássuk be, hogy létezik pontosan egy $\overline{\phi}\colon M/N \to M'$ R-lineáris leképezés, amelyre $\overline{\phi}\circ\pi = \phi$.

7. (Második izomorfizmus-tétel) Legyenek $P \leq N \leq M$ R-modulusok. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan természetes $M/P \to M/N$ and $N/P \to M/P$ R-lineáris leképezések, amelyekre a

$$0 \longrightarrow N/P \longrightarrow M/P \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt.

8. * Legyen k tetszőleges test, $P \in C \subseteq \mathbb{A}^2_k$ egy síkgörbe, $\mathfrak{m} \lhd \mathcal{O}_{C,P}$ az egyetlen maximális ideál. Mutassuk meg, hogy

$$\dim_k \mathcal{O}_{C,P}/\mathfrak{m}^r < \infty$$

minden $r \geq 1$ esetén.