7. Házi feladat

Beadási határidő: November 17.

A csillaggal megjelölt feladatokat kell beadni. A kétcsillagos feladatok a szokásosnál nehezebbnek számítanak.

1.* Legyenek V és W irreducibilis affin varietások a komplex számtest felett. Mutassuk meg, hogy V és W pontosan akkor biracionálisan ekvivalensek, ha léteznek $U \subseteq V$ és $T \subseteq W$ nemüres nyílt halmazok, amelyekre $U \simeq T$.

2. Legyen R tetszőleges gyűrű, $X \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Spec} R$ mint topologikus tér, $f, g \in R$. Jelölje

$$X_f \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Spec} R \setminus V(f) \ .$$

Igazoljuk az alábbi állításokat.

(1) $X_f \subseteq X$ nyílt a Zariski-topológiára nézve.
(2) A $\{X_f \mid f \in R\}$ halmazcsalád a Zariski-topológia egy bázisát adja $\operatorname{Spec} R$-en (vagyis minden X-beli nyílt halmaz felírható X_f alakú nyílt halmazok uniójaként).
(3) $X_f \cap X_g = X_{fg}$.
(4) $X_f = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha f nilpotens.
(5) $X_f = X$ akkor és csak akkor, ha $f \in R^\times$.
(6) $X_f = X_g$ pontosan akkor, ha $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.
(7) X_f minden nyílt fedésének van véges részfedése.

3. Legyen $\phi\colon R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, $X = \operatorname{Spec} R$, $Y = \operatorname{Spec} S$ mint topologikus terek. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.

(1) Ha $P \lhd S$ prímideál, akkor $\phi^{-1}(P) \subseteq R$ is az, ezért

$$\begin{array}{rcl} \phi^*\colon Y & \longrightarrow & X \\ P & \mapsto & \phi^{-1}(P) \end{array}$$

egy jóldefiniált függvény.
(2) Ha $f \in R$, akkor $(\phi^*)^{-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$; speciálisan, ϕ^* folytonos a Zariski-topológiára nézve.
(3) Ha $J \lhd R$, akkor $(\phi^*)^{-1}(V(I)) = V((\phi(I)))$.
(4) Ha $J \lhd S$, akkor $\overline{\phi^*(V(J))} = V(\phi^{-1}(J))$.
(5) Ha ϕ akkor ϕ^* egy homeomorfizmus Y-ról a $V(\ker\phi) \subseteq X$ zárt részhalmazra.
(6) $\operatorname{Spec} R$ és $\operatorname{Spec}(R/\operatorname{Nil}(R))$ természetes módon homeomorfak egymással.
(7) Ha ϕ injektív, akkor $\phi^*(Y) \subseteq X$ sűrű.
(8) $\phi^*(Y) \subseteq X$ pontosan akkor sűrű, ha $\ker\phi \subseteq \operatorname{Nil}(R)$.
(9) Ha $\psi\colon S \to T$ gyűrűhomomorfizmus, akkor $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

4. * Legyen $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ irreducibilis affin varietás, $P \in V$. Mutassuk meg, hogy van egy bijektív megfeleltetés $\mathcal{O}_{V,P}$ prímideáljai és V azon irreducibilis részvarietásai között, amelyek átmennek P-n.

5. Tetszőleges k test esetén jelölje $k[[x]]$ a k feletti formális hatványsorok gyűrűjét. Igazoljuk, hogy $k[[x]]$ egy lokális gyűrű.

6. Legyen $k = \mathbb{R}$ vagy $k = \mathbb{C}$, és jelölje $k\{x\}$ a 0-ban konvergens hatványsorok gyűrűjét. Lássuk be, hogy $k\{x\}$ szintén lokális gyűrű.

7. (i) Mutassuk meg, hogy egy főideálgyűrű mindig UFD.
(ii) Legyen R UFD, K a hányadostestje. Lássuk be, hogy minden $\alpha \in K$ egységektől eltekintve egyértelműen írható $\alpha = a/b$ alakba, ahol a-nak és b-nek nincsen közös osztója.