6. Házi feladat

Beadási határidő: Október 27.

A csillaggal megjelölt feladatokat kell beadni. A kétcsillagos feladatok a szokásosnál nehezebbnek számítanak.

1. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások.
   (1) Véges sok seholsem sűrű halmaz uniója seholsem sűrű.
   (2) Sűrű halmazok véges metszete szintén sűrű.
   (3) Legyen X irreducibilis noether-féle topologikus tér, $U \subseteq X$ nemüres nyílt halmaz. Ha $B \subseteq U$ sűrű, akkor $B \subseteq X$ is az.
   (4) Egy $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$-beli irreducibilis részvarietás képe egy reguláris leképezés szerint szintén irreducibilis.

2. Legyen R olyan gyűrű, amelyben minden $a \in R$ elemhez létezik olyan $n_a > 2$, amelyre $a^{n_a} = a$. Igazoljuk, hogy minden R-beli prímideál maximális.

3. (Gyűrű spektruma) Legyen R gyűrű, jelölje $\operatorname{Spec} R$ az R-beli prímideálok halmazát. Tetszőleges $S \subseteq R$ esetén legyen

$$V(S) \overset{\text{def}}{=} \{P \in \operatorname{Spec} R \mid S \subseteq P\} .$$

Lássuk be az alábbi állításokat.
   (1) $V(\{0\}) = \operatorname{Spec} R$, és $V(\{r\}) = \emptyset$ ha $r \in R^{\times}$.
   (2) $V(S) = V((S)) = V(\sqrt{(S)})$.
   (3) Ha $\{S_i \mid i \in I\}$ R-beli részhalmazok egy tetszőleges családja, akkor

$$V(\cup_{i\in I} S_i) = \bigcap_{i\in I} V(S_i) .$$

   (4) Ha $I, J \lhd R$, akkor $V(IJ) = V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.
   (5) A $\{V(S) \mid S \subseteq R\}$ halmaz egy topológiát határoz meg $\operatorname{Spec} R$-en, ez az ún. *Zariski-topológia.*
   (6) Írjuk le a Zariski-topoloógiát a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$ gyűrűk spektrumain. Mely pontok lesznek zártak?

3. Legyen X topologikus tér, $A, B \subseteq X$ tetszőleges részhalmazok.
   (1) Mutassuk meg, hogy $\operatorname{int}(A) = \{ x \in X \mid \exists U \subseteq X \text{ open for which } x \in U \subseteq A \}$.
   (2) Bizonyítsuk be, hogy $\overline{A} = \{ x \in X \mid \forall U \subseteq X \text{ nyílt, amelyre } x \in U : U \cap A \neq \emptyset \}$.
   (3) Igazoljuk, hogy A pontosan akkor nyílt, ha $A = \operatorname{int}(A)$, továbbá A pontosan akkor zárt, ha $\overline{A} = A$.
   (4) Ellenőrizzük, hogy $X - \operatorname{int}(A) = \overline{X - A}$, és $X - \overline{A} = \operatorname{int}(X - A)$.
   (5) Igazoljuk az alábbi állításokat: $\operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(A \cap B)$, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
   (6) Lássuk be, hogy

$$\bigcap_{\alpha\in I} \operatorname{int}(A_\alpha) \supseteq \operatorname{int}\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \operatorname{int}\left(\bigcap_{\alpha\in I} \operatorname{int}(A_\alpha)\right) \quad , \quad \bigcup_{\alpha\in I} \operatorname{int}(A_\alpha) \subseteq \operatorname{int}\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) .$$

   (7) Ellenőrizzük, hogy ha $A \subseteq B$, akkor $\operatorname{int}(A) \subseteq \operatorname{int}(B)$ és $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

4. Legyen $V \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ nemüres affin varietás, $\phi \in \mathbb{C}[V]$. Mutassuk meg, hogy $V_V(\phi) = \emptyset$ pontosan akkor, ha ϕ invertálható $\mathbb{C}[V]$-ben. Mi történik az $\mathbb{R}$ alaptest felett?

5. Legyenek X, Y affin varietások. Mi a viszony az $X \times Y$-on értelmezett Zariski-topológia és a szorzattopológia között?

6. Legyen X tetszőleges topologikus tér. Mutassuk meg, hogy X pontosan akkor Hausdorff, ha $\Delta(X) \subseteq X \times X$ zárt halmaz.

7. * Legyen X irreducibilis affin varietás egy algebrailag zárt test felett, $U \subseteq X$ nemüres nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $\phi \in k(X)$ racionális függvény *reguláris* U*-n*, ha minden $P \in U$ pontban értelmezve van. Az ilyen függvények k-algebráját $\mathcal{O}_X(U)$-val jelöljük.

(1) Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X,P}$ mint $k(X)$ részhalmazai.

(2) Lássuk be, hogy $\phi \in k(X)$ pontosan akkor reguláris U-n, ha minden $P \in U$ esetén létezik olyan $P \in V \subseteq U$ nyílt halmaz és $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ polinomok, amelyekre

(a) $g(Q) \neq 0$ minden $Q \in V$ esetén, és

(b) $\phi(Q) = f(Q)/g(Q)$ minden $Q \in V$ pontra.

7. * Határozzuk meg az $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}}(\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \setminus \{(0,0)\})$ k-algebrát.

8. ** Legyen X egy irreducibilis affin varietás. Keressük meg a gyűrűkéve definícióját, és igazoljuk, hogy a

$$U \subseteq X \text{ nyílt} \quad \mapsto \quad \mathcal{O}_X(U)$$

hozzárendelés egy gyűrűkévét definiál az (X, τ_{Zar}) topologikus téren.