Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2014 ősz / Küronya Alex

5. Házi feladat

Beadási határidő: Október 20.

A csillaggal megjelölt feladatokat kell beadni. A kétcsillagos feladatok a szokásosnál nehezebbnek számítanak.

1. Dönstük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak.
   (1) Legyen X topologikus tér, $Y, Z \subseteq X$ irreducibilis alterek. Ekkor $Y \cap Z$ szintén irreducibilis.
   (2) A $V(xy) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ affin varietás irreducibilis.
   (3) A komplex affin sík minden nyílt részhalmaza irreducibilis.
   (4) A $V(xy-1) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ affin varietás irreducibilis.

2. Ellenőrizzük, hogy minden prímideál előáll, mint egy testbe menő homomorfizmus magja.

3. Mutassuk meg, hogy egy irreducibilis topologikus tér minden nemüres nyílt részhalmaza sűrű.

4. Azonosítsuk a k testet az $\mathbb{A}^1_k$ affin egyenessel, és igazoljuk, hogy minden $f\colon X \to k$ reguláris függvény (V affin varietás) folytonos a Zariski-topológiára nézve. Igaz marad-e az állítás, ha tetszőleges reguláris leképezéseket tekintünk?

5. Adjunk példát olyan $f\colon \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^2_k$ reguláris leképezésre, amely homeomorfizmus a képére, de nem izomorfizmus a megfelelő varietások között.

6. Határozzuk meg, hogy a $V(x^2+y^2-1) \subseteq \mathbb{A}^2$ körvonal mely pontjaiban lesz reguláris a $\phi = \frac{y-1}{x}$ racionális függvény.

7. * Határozzuk meg, hogy az $X = V(y^2 - x^3 - x^2) \subseteq \mathbb{A}^2$ görbe mely pontjaiban lesz az $\phi = \frac{y}{x}$ racionális függvény reguláris.

8. Bizonyítsuk be a noether-féle topologikus terekre vonatkozó alábbi állításokat.
   (1) Ha $Y \subseteq X$ tetszőleges altér, akkor Y is noether-féle, továbbá $\dim Y \leq \dim X$.
   (2) Legyen $\{U_i \,|\, i \in I\}$ az X tér egy nyílt fedése. Ekkor
   $$\dim X \;=\; \sup_{i\in I} \dim U_i \ .$$
   (3) Ha $U \leq X$ sűrű nyílt halmaz, akkor $\dim U = \dim X$.
   (4) Legyen X véges-dimenziós irreducibilis topologikus térm $Y \subseteq X$ zárt altér. Ekkor ha $\dim Y = \dim X$, akkor $Y = X$.

Definíció. Egy $I \lhd k[x_1,\ldots,x_n]$ ideált *nulla-dimenziós*nak nevezünk, ha
$$\dim_k k[x_1,\ldots,x_n]/I < \infty \ .$$

9. Igazoljuk, hogy egy I ideál pontosan akkor nulla-dimenziós, ha $V(I)$ véges.

10. Legyen k tetszőleges test, $\{p_1,\ldots,p_m\} \subseteq \mathbb{A}^n_k$ egy véges halmaz. Konstruáljunk olyan f polinomot, amelyre
$$f(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = 1 \\ 0 & \text{ha } i > 1\ . \end{cases}$$

11. Bizonyítsuk be, hogy
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/I \;\leq\; \#V(I)$$
minden nulla-dimenziós I ideálra, ahol egyenlőség pontosan akkor áll, ha I radikál.

12. Legyen $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ nulla-dimenziós ideál, $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, jelölje továbbá $\mu_f : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I$ az f-fel való szorzást mint lineáris leképezést.

(1) Ellenőrizzük, hogy μ_f valóban lineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy $\mu_f = \mu_g$ pontosan akkor, ha $f - g \in I$.
(2) Bizonyítsuk be, hogy $\mu_{f+g} = \mu_f + \mu_g$ és $\mu_{fg} = \mu_f \cdot \mu_g$ minden $g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ esetén.
(3) Lássuk be, hogy $\mu_{h(f)} = h(\mu_f)$ minden $h \in \mathbb{C}[t]$ polinomra.

13. Az előző feladatok jelöléseivel mutassuk meg, hogy μ_f sajátértékei egybeesnek az $f\colon V(I) \to \mathbb{C}$ függvény értékkészletével.

14. Bonstsuk fel az $V(x^2 - yz, xz - x) \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ affin varietást irreducibilis komponenseire.

15. * Legyenek $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ affin varietások, $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} V(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \subseteq \mathbb{A}^{2n}$. Mutassuk meg, hogy

$$\phi : X \cap Y \to (X \times Y) \cap \Delta \ , \ x \mapsto (x, x)$$

izomorfizmus.

16. Határozzuk meg az $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, xy)$ reguláris leképezés képét, és írjuk le topologikus szempontból.