Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2014 ősz / Küronya Alex

4. Házi feladat

**Beadási határidő: Október 13.**

A csillaggal megjelölt feladatokat kell beadni. A kétcsillagos feladatok a szokásosnál nehezebbnek számítanak.

1. (Homogén polinomok) Legyen $k$ tetszőleges test, $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$, $d$ egy pozitív egész. Azt mondjuk, hogy $f$ *$d$-edfokú homogén polinom*, ha minden $\lambda \in k$ esetén
$$f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^d \cdot f(x_1,\ldots,x_n)\ .$$
Egy $d$-edfokú homogén polinomot gyakran *$d$-edfokú formá*nak is nevezünk. Igazoljuk az alábbi állításokat.
   (1) Egy $f$ polinom pontosan akkor $d$-edfokú homogén, ha $d$-edfokú monomok $k$-lineáris kombinációja.
   (2) Minden $f$ polinomot egyértelműen írhatunk fel homogén polinomok összegeként. Ezeket $f$ homogén részeinek hívjuk.
   (3) * (Euler tétele) Legyen $\operatorname{char} k = 0$. Ekkor egy $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ polinom pontosan akkor $d$-edfokú homogén, ha
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \partial_{x_i} f = d \cdot f\ .$$
   (4) Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény. Igaz-e, hogy $f$ pontosan akkor $d$-edfokú homogén, ha
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \partial_{x_i} f = d \cdot f\ ?$$

2. Legyenek $I, J, K \lhd R$; mutassuk meg az alábbi, hányadosideálokra vonatkozó állításokat.
   (1) $(I\colon R) = R$.
   (2) $IJ \subseteq K$ pontosan akkor, ha $I \subseteq (K\colon J)$.
   (3) $(J\colon I)$ akkor és csak akkor, ha $(I\colon J) = R$.
   (4) Legyen $\{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$ $R$-beli ideálok egy családja. Ekkor
$$(I\colon \sum_{\alpha\in A} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} (I\colon I_\alpha)\ .$$
   (5) $((I\colon J)\colon K) = (I\colon JK)$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ irreducibilis polinom, akkor $V(f) \subseteq \mathbb{A}^n_k$ irreducibilis affin varietás.

4. Legyen $I \lhd k[x_1,\ldots,x_n]$ egy valódi ideál, $k$ algebrailag zárt. Ekkor
$$\sqrt{I} = \bigcap_M M\ ,$$
ahol $M$ végigfut az összes $I$-t tartalmazó maximális ideálon.

5. Igazoljuk, hogy ha $k$ végtelen test, akkor $\mathbb{A}^n_k$ minden lineáris altere irreducibilis varietás.

6. Legyenek $V \subseteq W \subseteq \mathbb{A}^n_k$ affin varietások. Mutassuk meg, hogy $V$ minden irreducibilis komponense benne van $W$ egy irreducibilis komponensében.

7. Legyen $R$ tetszőleges gyűrű, $\{P_1,\ldots,P_r\}$ prímideálok egy halmaza. Igazoljuk, hogy $P_1 \cap \cdots \cap P_r$ pontosan akkor, ha létezik $1 \le i \le r$, amelyre $P_i$ része minden $P_j$-nek.

8. Legyen $k$ algebrailag zárt, $f \in k[x_1,\ldots,x_n]$ irreducibilis faktorokra történő felbontása
$$f = f_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot f_r^{\alpha_r}\ .$$
Igazoljuk, hogy
$$V(f) = V(f_1) \cup \cdots \cup V(f_r)$$
$V(f)$ irreducibilis komponensekre való felbontása, továbbá $I(V(f)) = (f_1,\ldots,f_r)$.

9. Legyen $V(f)$ egy $d$-edfokú síkgörbe egy algebrailag zárt test felett, amelynek van egy $d$ multiplicitású pontja. Bizonyítsuk be, hogy $V(f)$ $d$ különböző egyenesből áll.

10. Találjuk meg az alábbi komplex síkgörbék szinguláris pontjait, és adjuk meg a szinguláris pontokban az összes érintőegyenest.

(1) $x^d - y^d$
(2) $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3$
(3) $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2$
(4) $y^3 - y^2 + x^3 - x^2 + 3xy^2 + 3x^2y + 2xy$
(5) $x^4 + y^4 - x^2y^2$

11. Legyen $R$ tetszőleges gyűrű, $I$ pedig olyan ideál, amely maximális a nem végesen generáltak között. Mutassuk meg, hogy $I$ prím.

12. Legyen $R$ tetszőleges gyűrű, $I$ pedig olyan ideál, amely maximális a nem principális ideálok között. Mutassuk meg, hogy $I$ prím.

13. Legyenek $I_1, \dots, I_m$ $R$-beli ideálok, $P \lhd R$ prím, amelyre $P \supseteq \cap_{i=1}^m I_i$.

(1) Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1 \le i \le m$, amelyre $P \supseteq I_i$;
(2) ha $P = \cap_{i=1}^m I_i$, akkor $P = I_i$ valamely $1 \le i \le m$ esetén.

14. Legyen $C \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ irreducibilis síkgörbe. Igazoljuk, hogy $C$-nek véges sok szinguláris pontja van.