Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2014 ősz / Küronya Alex

3. Házi feladat

Beadási határidő: Október 6.

A csillaggal megjelölt feladatokat kell beadni. A kétcsillagos feladatok a szokásosnál nehezebbnek számítanak.

1. Mutassuk meg, hogy ha tetszőleges I és J ideálokra $(I : J) = (I : \sqrt{J})$. Igaz-e az $(I : J) = (\sqrt{I} : J)$ állítás?

2. Határozzuk meg az alábbi részhalmazok Zariski-lezártját a megadott affin térben.
   (1) A második kvadránsa $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$-ben.
   (2) Az összes racionális koordinátájú pont $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ x-tengelyén.
   (3) Az összes racionális koordinátájú pont $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$-ben.
   (4) Az összes olyan pont $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$-ben, amelynek nulla képzetes része és irracionális valós része van.
   (5) Az összes egész koordinátájú pont $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$-ben.
   (6) Az összes egész koordinátájú pont $\mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}}$-ben.
   (7) Az $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$-beli nyílt egységkörlemez.
   (8) A szinuszfüggvény gráfja $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$-ben.

3. Legyen $I \lhd R$, és jelölje

$$\begin{aligned} \pi \colon R &\longrightarrow R/I \\ r &\mapsto r+I \end{aligned}$$

a természetes szürjekciót. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{aligned} R/I\text{-beli ideálok} &\longrightarrow R\text{-beli } I\text{-t tartalmazó ideálok} \\ J &\mapsto \pi^{-1}(J) \end{aligned}$$

hozzárendelés bijektív és megőrzi az ideálok tartalmazását.

4. Legyen $\phi \colon R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus. Mutassuk meg, hogy
   (1) $\ker\phi \stackrel{\text{def}}{=} \{r \in R \mid \phi(r) = 0\}$ ideál R-ben, továbbá minden R-beli ideál előáll az említett alakban.
   (2) $\operatorname{im}\phi \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi(r) \mid r \in R\}$ részgyűrűje S-nek, de nem feltétlenül ideál.
   (3) A ϕ leképezés egy

$$\begin{aligned} \overline{\phi} \colon R/I &\longrightarrow \operatorname{im}\phi \\ r+I &\mapsto \phi(r) \end{aligned}$$

   izomorfizmust határoz meg.

5. Ellenőrizzük, hogy az R-beli nilpotens elemek ideált alkotnak, az R gyűrű ún. nilradikálját. Mutassuk meg, hogy $R/\operatorname{Nil}(R)$-ben nincsen nullától különböző nilpotens elem.

6. Lássuk be, hogy $\sqrt{I}$ megegyezik az I-t tartalmazó prímideálok metszetével.

7. Az R gyűrű $\operatorname{Jac}(R)$ *Jacobson-radikál*ja az R-beli maximális ideálok metszete. Bizonyítsuk be, hogy egy $r \in R$ elemre $r \in \operatorname{Jac}(R)$ pontosan akkor, ha minden $s \in R$ esetén $1 - sr \in R^{\times}$.

8. Ellenőrizzük, hogy egy nilpotens elem és egy egység összege ismét egység lesz.

9. * Mutassuk meg, hogy egy $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$ polinom pontosan akkor egység, ha $a_0 \in R^{\times}$, és minden más együttható nilpotens.

10. Igazoljuk, hogy egy $a_0 + a_1 x \ldots + a_n x^n \in k[x]$ polinom (ahol k egy testet jelöl) pontosan akkor nilpotens, ha minden együtthatója nilpotens.

11. Legyen (X, τ) topologikus tér, $A \subseteq X$ pedig tetszőleges részhalmaza. Az A halmazon τ által indukált τ_A altértopológiát az alábbi módon definiáljuk:

$$B \in \tau_A \text{ pontosan akkor, ha létezik } U \in \tau \text{, amelyre } U \cap A = B \; .$$

Igazoljuk, hogy (A, τ_A) valóban topologikus tér, továbbá τ_A a legkisebb olyan topológia A-n amelyre nézve az $\iota\colon A \hookrightarrow X$ természetes beágyazás folytonos.