Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2014 ősz / Küronya Alex

2. Házi feladat

Beadási határidő: Szeptember 29.

A csillaggal megjelölt feladatokat kell beadni. A kétcsillagos feladatok a szokásosnál nehezebbnek számítanak.

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges $V, W \subseteq \mathbb{A}^n_k$ affin varietások esetén
   (1) $V \subseteq W$ pontosan akkor, ha $I(V) \supseteq I(W)$;
   (2) $V = W$ akkor és csak akkor, ha $I(V) = I(W)$.

2. Mutassuk meg, hogy $\sqrt{I}$ radikál ideál minden $I \lhd R$ esetén.

3. Határozzuk meg az összes prím- és maximális ideált a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[x]$, és $\mathbb{C}[x]$ gyűrűkben.

4. Legyen $I \lhd R$ tetszőleges ideál. Igazoljuk, hogy
   (1) I pontosan akkor prím, ha az R/I hányadosgyűrű integritási tartomány;
   (2) I pontosan akkor maximális, ha R/I test.

5. Egy $r \in R$ elemet *nilpontens*nek nevezünk, ha létezik olyan n természetes szám, amelyre $r^n = 0$. Bizonyítsuk be, hogy egy $r \in R$ pontosan akkor nilpontens, amennyiben minden R-beli prímideálnak eleme.

6. Igazoljuk az alábbi $k[x, y]$-beli azonosságokat:
   (1) $(2x^2 + 3y^2 - 11, x^2 - y^2 - 3) = (x^2 - 4, y^2 - 1)$
   (2) $(x + xy, y + xy, x^2, y^2) = (x, y)$.

7. * Legyen k végtelen test, $C \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, t^3, t^4) \mid t \in \} \subseteq \mathbb{A}^3_k$. Mutassuk meg, hogy C affin varietás, és határozzuk meg az eltűnési ideálját.

8. Bizonyítsuk be, hogy minden algebrailag zárt test végtelen.

9. Legyen $I = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subseteq \mathbb{R}[x, y]$. Adjunk példát olyan f polinomra, amelyre $f \in I(V(I)) \setminus I$.

10. Ellenőrizzük, hogy $\sqrt{(x^m, y^n)} = (x, y) \subseteq k[x, y]$ minden m és n pozitív egészek esetén.

11. Igazoljuk az ideálok összegére vonatkozó alábbi állításokat:
   (1) R-beli ideálok egy tetszőleges halmazának az összege ismét csak R-beli ideál lesz.
   (2) Ideálok összege megegyezik a szereplő ideálokat tartalmazó legkisebb ideállal.
   (3) Ha $\{I_\alpha \mid \alpha \in A\}$ $k[x_1, \ldots, x_n]$-beli ideálok egy halmaza, akkor
$$V(\sum_{\alpha \in A} I_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} V(I_\alpha) \ .$$

12. Mutassuk meg, hogy $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ tetszőleges $I, J \lhd R$ esetén.

13. Legyenek $I, J \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ tetszőleges ideálok; lássuk be, hogy
$$V(I \cap J) = V(I) \cup V(J) = V(IJ) \ .$$

14. Igazoljuk az ideálok radikáljára vonatkozó alábbi állításokat.
   (1) Ha $I^m \subseteq J$ egy $m > 0$ természetes számra, akkor $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$.
   (2) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.
   (3) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$, de általában $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{I}\sqrt{J}$. Adjunk példát arra, hogy radikál ideálok szorzata nem mindig lesz radikál.

15. Azt mondjuk, hogy az $I, J \subseteq R$ ideálok *komaximális*ak, ha $I + J = R$. Mutassuk meg, hogy
   (1) ha I és J komaximális, akkor $IJ = I \cap J$.
   (2) amennyiben $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, akkor I és J pontosan akkor komaximálisak, ha $V(I) \cap V(J) = \emptyset$.

16. Egy $I \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ ideált *monomiális*nak mondunk, ha van monomokból álló generátorrendszere. Igazoljuk hogy ha I monomiális ideál, akkor az I-beli monomok I-nek mint k-vektortérnek egy bázisát adják.