KOMMUTATÍV ALGEBRA ÉS ALGEBRAI GEOMETRIA / 2014 ŐSZ / KÜRONYA ALEX

1. HÁZI FELADAT

Beadási határidő: Szeptember 22.

A csillaggal megjelölt feladatokat kell beadni. A kétcsillagos feladatok a szokásosnál nehezebbnek számítanak.

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges R integritási tartomány és $n \geq 1$ egész szám esetén $R[x_1, \ldots, x_n]$ is integritási tartomány, de soha nem test.

2. Ellenőrizzük, hogy minden $\{a\} \in \mathbb{A}_k^n$ egyelemű halmaz affin varietás. Mutassuk meg, hogy amennyiben k egy véges test, akkor $\mathbb{A}_k^n$ tetszőleges részhalmaza affin varietás.

3. Legyen $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Igazoljuk, hogy f a nulla polinom, amennyiben eltűnik minden egész koordinátákkal rendelkező pontban. Mi történik, ha $\mathbb{C}$ helyett a valós vagy a racionális számtestet tekintjük?

4. Legyen $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, és jelölje d az f polinom legmagasabb x_i-fokát $(1 \leq i \leq n)$. Mutassuk meg, hogy f a nulla polinom, amennyiben $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ minden olyan $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ pont esetén, amelyre $1 \leq a_i \leq d + 1$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

5.* Jelölje $S \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, a) \mid a \in \mathbb{C}^\times\}$; döntsük el, hogy $S \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ affin varietás-e. Válaszoljuk meg a kérdést az F_{19} test felett is.

6. Döntsük el, hogy a $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ részhalmaz vajon affin varietás-e.

7. Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak.
   (1) Affin varietások tetszőleges uniója szintén affin varietás.
   (2) Egy affin varietás komplementuma szintén affin varietás.
   (3) Két affin varietás halmazelméleti különbsége megint csak affin varietás.

8. Legyenek $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ és $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ affin varietások. A Descartes-féle szorzatukat az alábbi módon definiáljuk:

$$V \times W \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in \mathbb{A}_l^{n+m} \mid a \in V, b \in W\} \subseteq \mathbb{A}_k^{n+m} .$$

Mutassuk meg, hogy $V \times W \subseteq \mathbb{A}_k^{n+m}$ affin varietás lesz.

9.** Legyen k egy algebrailag *nem* zárt test, $X = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{A}_k^n$ egy véges sok polinom által megadott affin varietás[1]. Bizonyítsuk be, hogy X megadható mint egy darab polinom nullhelyeinek halmaza.

10. Írjuk le az alábbi ideálok közös nullhelyeinek halmazát:
   (1) $(xy, xz, yz) \subseteq k[x, y, z]$,
   (2) az összes d-edfokú négyzetmentes monom által generált ideál a $k[x_1, \ldots, x_n]$ gyűrűben, ahol $1 \leq d \leq n$.

11. *** Találjunk olyan háromváltozós valósegyütthatós polinomot, amely a változók minden értékére nemnegatív, de nem áll elő mint polinomok négyzeteinek pozitív lineáris kombinációja.

[1]Hamarosan látni fogjuk, hogy ez utóbbi feltétel a Hilbert-féle bázis tétel miatt minden affin varietásra teljesül