Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 ősz / Küronya Alex

4. Gyakorlat

1. Mutassuk meg, hogy ha R kommutatív noether-gyűrű, akkor minden $S \subseteq R$ multiplikatív halmaz esetén $S^{-1}R$ is noether.

2. Határozzuk meg az $\mathcal{O}_{X,(0,0,0)}$ lokális gyűrűt, ahol $X \subseteq \mathbb{A}^3$ a három koordinátatengely uniója.

3. Tetszőleges k test esetén írjuk le a $k[x]_{(x)}$ gyűrű spektrumát.

4. Legyen R gyűrű, $f, g \in R$. Igazoljuk az alábbi állításokat:
(1) $D_f \cap D_g = D_{fg}$.
(2) $D_f = \emptyset$ pontosan akkor, ha f nilpotens.
(3) $D_f = \operatorname{Spec} R$ pontosan akkor, ha $f \in R^\times$.
(4) $D_f = D_g$ pontosan akkor, ha $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.
(5) D_f kompakt halmaz.
(6) $U \subseteq \operatorname{Spec} R$ pontosan akkor kompakt, ha véges sok D_f alakú halmaz uniója.

5. Legyen $\phi : R \to S$ gyűrűhomomorfizmus, $\phi^* : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$ az általa indukált függvény. Mutassuk meg az alábbiakat:
(1) Ha $f \in R$, akkor $(\phi^*)^{-1}(D_f) = D_{\phi(f)}$.
(2) ϕ^* folytonos függvény a Zariski-topológiára nézve.
(3) Ha $I \lhd R$, akkor $(\phi^*)^{-1}(V(I)) = V(\phi(I)S)$, ahol $\phi(I)S$ az I ideál S-beli képe által generált ideál S-ben.
(4) Ha $J \lhd S$, akkor $\overline{\phi^*(V(J))} = V(\phi^{-1}(J))$.
(5) Amennyiben ϕ szürjektív, akkor ϕ^* $\operatorname{Spec} S$-t homeomorf módon képezi le a $V(\ker \phi) \subseteq \operatorname{Spec} R$ zárt altérre.
(6) $\phi^*(\operatorname{Spec} S) \subseteq \operatorname{Spec} R$ pontosan akkor sűrű, ha $\ker \phi \subseteq \operatorname{Nil}(R)$.
(7) Ha $\psi : S \to Q$ szintén egy gyűrűhomomorfizmus, akkor $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

Definíció. Legyen $\mathcal{T}$ egy modulusokon értelmezett tulajdonság. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{T}$ *lokális tulajdonság*, ha $\mathcal{T}$ pontosan akkor teljesül egy M R-modulusra, ha minden $P \in \operatorname{Spec} R$ esetén igaz az M_P R_P-modulusra.

6. Mutassuk meg, hogy $M = 0$ lokális tulajdonság. Pontosabban, igazoljuk, hogy az alábbi állítások ekvivalensek tetszőleges M R-modulus esetén.
(1) $M = 0$.
(2) $M_P = 0$ minden $P \in \operatorname{Spec} R$ esetén.
(3) $M_\mathfrak{m} = 0$ minden $\mathfrak{m} \lhd R$ maximális ideálra.

Házi feladatok

6. Igaz-e, hogy ha R (kommutatív, egységelemes) noether-gyűrű, akkor az $R[[x]]$ formális hatványsorgyűrű is noether?

7. Adjunk példát olyan $\phi : R \to S$ homomorfizmusra, amelyre ϕ^* bijektív, de nem homeomorfizmus.

8. Legyen $\phi : M \to N$ egy R-modulushomomorfizmus. Az alábbi állítások ekvivalenciájával bizonyítsuk be, hogy injektívnek/szürjektívnek lenni lokális tulajdonság.

(1) ϕ injektív/szürjektív.
(2) Minden $P \in \operatorname{Spec} R$ esetén ϕ_P injektív/szürjektív.
(3) Minden $\mathfrak{m} \lhd R$ maximális ideálra $\phi_\mathfrak{m}$ injektív/szürjektív.

9. Legyenek $I, J \lhd R$, J végesen generált, $S \subseteq R$ egy multiplikatív halmaz. Mutassuk meg, hogy

$$S^{-1}(I : J) = (S^{-1}I : S^{-1}J) .$$

10. Legyen $X \subseteq \mathbb{A}^n$ affin algebrai halmaz, G egy véges csoport, ami hat X-en (vagyis: minden $g \in G$ esetén adott egy $\alpha(g) : X \to X$ automorfizmus úgy, hogy $\alpha(1_G) = \mathrm{id}_G$ és $\alpha(gh) = \alpha(g) \circ \alpha(h)$). Egy $f \in k[X]$ reguláris függvényt G-*invariáns*nak hívunk, ha minden $g \in G$ és minden $x \in X$ esetén

$$f(g(x)) = f(x) .$$

Az X-en értelmezett G-invariáns reguláris függvények k-algebráját $k[X]^G$-vel jelöljük.

(1) Ellenőrizzük, hogy $k[X]^G$ valóban k-algebra.
(2) Mutassuk meg, hogy $k[X]^G$ végesen generált.
(3) Tekintsük a $k[X]^G \hookrightarrow k[X]$ k-algebrák közti homomorfizmust, illetve a neki megfelelő $\pi : Y \to X$ reguláris leképezést (ahol Y egy, a $k[X]^G$ algebrának megfelelő affin algebrai halmaz). Igazoljuk, hogy
   (a) π szürjektív;
   (b) tetszőleges $x, x' \in X$ esetén $\pi(x) = \pi(x')$ pontosan akkor teljesül, ha x és x' ugyanabban a G-orbitban vannak.

Az Y algebrai halmazt X/G-vel jelöljk̈, és az X algebrai halmaznak az $\alpha : G \times X \to X$ csoporthatás szerinti hányadosának nevezzük.

11. Legyen $\mu_n \subseteq \mathbb{C}$ a komplex n-edik egységgyökök csoportja. Tetszőleges $m \geq 1$ esetén tekintsük az

$$\begin{aligned} \alpha_{n,m} : \mu_n \times \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{C}^m \\ (\epsilon, (z_1, \ldots, z_m)) &\mapsto (\epsilon z_1, \ldots, \epsilon z_m) \end{aligned}$$

csoporthatást. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{C}/\mu_n \simeq \mathbb{C}$ mint affin varietások, de $\mathbb{C}^2/\mu_n \not\simeq \mathbb{C}^2$, ha $n \geq 2$.