Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 ősz / Küronya Alex

3. Gyakorlat

1. Azonosítva a k testet az $\mathbb{A}^1_k$ affin egyenessel mutassuk meg, hogy egy ha X egy algebrai halmaz, akkor $f \in k[X]$ folytonos, mint $f : X \to \mathbb{A}^1_k$ függvény a Zariski-topológiára nézve.

2. Adjunk példát olyan $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ reguláris leképezésre, amely *nem* izomorfizmus, de homeomorfizmus a Zariski-topológiára nézve $\mathbb{A}^1$ és $\mathbb{A}^1$ képe között.

3. A $V(x^2 + y^2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ körvonal mely pontjaiban lesz a $\phi = \frac{y-1}{x}$ racionális függvény reguláris?

4. Mik azok a pontokjai a $V(y^2 - x^2 - x^2) \subseteq \mathbb{A}^2$ görbének, amelyekben a y/x racionális függvény reguláris? Mutassuk meg, hogy $y/x \notin k[X]$, de van olyan hatványa, amely $\in k[X]$.

5. Igazoljuk a noether-féle topologikus terek dimenziójára vonatkozó alábbi állításokat. Legyen X noether topologikus tér.

(1) Ha $Y \subseteq X$ tetszőleges altér, akkor Y is noether, továbbá $\dim Y \leq \dim X$.

(2) Legyen $\{U_i \mid i \in I\}$ egy nyílt fedése X-nek. Ekkor

$$\dim X = \sup_{i \in I} \dim U_i \ .$$

(3) Igaz-e, hogy ha $U \subseteq X$ sűrű nyílt halmaz, akkor $\dim U = \dim X$?

(4) Legyen X véges-dimenziós irreducibilis noether tér, $Y \subseteq X$ zárt altér. Mutassuk meg, hogy ha $\dim Y = \dim X$, akkor $Y = X$.

Házi feladatok

Egy $I \lhd k\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ polinomideált *nulla-dimenziós*nak nevezünk, ha

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I < \infty \ .$$

7. Bizonyítsuk be, hogy egy I ideál pontosan akkor nulla-dimenziós, ha $V(I)$ véges halmaz.

8. Legyen most k tetszőleges test, $\{p_1, \dots, p_m\} \subseteq \mathbb{A}^n$ egy véges halmaz. Konstruáljunk olyan f polinomot, amelyre

$$f(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = 1 \\ 0 & \text{ha } i > 1 \ . \end{cases}$$

9. Igazoljuk, hogy ha I nulla-dimenziós ideál, akkor

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I \leq \#V(I) \ .$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha I radikál.

10. Legyen $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ nulla-dimenziós ideál, $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Jelölje $\mu_f : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I \to \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ az f-fel való szorzást mint lineáris leképezést.

(1) Igazoljuk, hogy μ_f valóban lineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy $\mu_f = \mu_g$ pontosan akkor, ha $f - g \in I$.

(2) Ha $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, akkor $\mu_{f+g} = \mu_f + \mu_g$ és $\mu_{fg} = \mu_f \cdot \mu_g$.

(3) Tetszőleges $h \in \mathbb{C}[t]$ polinom esetén $\mu_{h(f)} = h(\mu_f)$.

11. Az előző feladat jelöléseivel bizonyítsuk be, hogy μ_f sajátértékei megegyeznek az $f : V(I) \to \mathbb{C}$ függvény értékkészletével.

12. Legyen R tetszőleges gyűrű, $I, J, L \lhd R$. Jelölje

$$(I : J) \stackrel{\text{def}}{=} \{r \in R \,|\, rJ \subseteq I\}$$

az I és J ideálok ún. *hányadosideál*ját. Először is ellenőrizzük, hogy $(I : J) \subseteq R$ valóban ideál. Továbbá igazoljuk az alábbi alaptulajdonságait.

(1) $I \subseteq (I : J)$.
(2) $J(I : J) \subseteq I$.
(3) $((I : J) : L) = (I : JL) = ((I : L) : J)$.
(4) $(\cap_{\alpha \in A} I_\alpha : J) = \cap_{\alpha \in A}(I_\alpha : J)$.
(5) $(I : \sum_{\alpha \in A} J_\alpha) = \cap_{\alpha \in A}(I : J_\alpha)$.
(6) Ha I radikálideál, akkor $(I : J)$ is az.

13. Ha $I, J \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ tetszőleges ideálok, akkor mutassuk meg, hogy $V(I : J)$ a $V(I) - V(J) \subseteq \mathbb{A}^n$ részhalmaz lezártja a Zariski-topológiára nézve.

14. Adjunk példát olyan $I, J \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ideálokra, amelyekre $IJ \neq I \cap J$. Mutassuk meg, hogy amennyiben $I + J = (1)$, akkor $IJ = I \cap J$ is teljesül. Igazoljuk, hogy

$$V(IJ) = V(I \cap J)$$

minden feltétel nélkül igaz.