Kommutatív algebra és algebrai geometria / 2009 ősz / Küronya Alex

2. Gyakorlat

1. Tekintsük az $f(x,y) = y^2 - x^3$ egyenlettel definiált $C \subseteq \mathbb{A}^2_k$ síkgörbét.
   (1) Igazoljuk, hogy $k[C]$ minden eleme egyértelműen írható $P(x) + Q(x)y$ alakba, ahol $P, Q \in k[x]$.
   (2) Mutassuk meg, hogy az $f : \mathbb{A}^1 \to C$, $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} (t^2, t^3)$ reguláris leképezés nem izomorfizmus.

2. Legyen $f : X \to Y$ egy reguláris leképezés,

$$\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{\, (x, f(x) \,|\, x \in X \,\}$$

pedig az f *leképezés gráfja.* Igazoljuk, hogy $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ zárt részhalmaz, továbbá hogy $\Gamma_f \simeq X$.

3. Igazoljuk, hogy tetszőleges R kommutatív gyűrű esetén a nilpotens elemek halmaza R egy ideálja. Ezt az ideált $\mathrm{Nil}(R)$-rel jelöljük, és R *nilradikáljának* nevezzük. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Nil}(R)$ megegyezik R összes prímideáljának a metszetével.

4. * Legyenek $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$ algebrai halmazok. Tekintsük az $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{2n}$, illetve a $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} V(x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \subseteq \mathbb{A}^{2n}$ algebrai halmazokat. Mutassuk meg, hogy a

$$\phi : X \cap Y \to (X \times Y) \cap \Delta \ , \ x \mapsto (x, x)$$

reguláris leképezés egy izomorfizmus.

5. Határozzuk meg az $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $f(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (x, xy)$ reguláris leképezés képét, és jellemezzük topológiailag.

6. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{A}^2_k$ és $\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$ nem homeomorfak, mindkét esetben a Zariski-topológiát feltételezve.

Házi feladatok

7. Az X algebrai halmaz egy önmagával vett $f : X \to X$ izomorfizmusát X egy *automorfizmus*ának hívjuk. Mutassuk meg, hogy tetszőleges k test esetén $\mathbb{A}^1_k$ minden automorfizmusa $f(x) = ax + b$ alakú, ahol $a, b \in k$ és $a \neq 0$.

8. Legyen $\mathrm{char}(k) \neq 2$. Tekintsük a $C \stackrel{\text{def}}{=} V(y^2 = x^2 + x^3) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ síkgörbét és az $f(x) = (x^2 - 1, x(x^2 - 1))$ képlettel definiált $f : \mathbb{A}^1 \to C$ reguláris leképezést. Bizonyítsuk be, hogy

$$f^* : k[C] \xrightarrow{\sim} \{\, g(x) \in k[x] \,|\, g(1) = g(-1) \,\} \subseteq k[x] \ .$$

9. Bizonyítsuk be, hogy két irreducibilis algebrai halmaz szorzata is irreducibilis.

10. Adjunk példát olyan R gyűrűre és $I, J \subseteq R$ ideálokra, amelyekre $IJ \neq I \cap J$. Igazoljuk, hogy ha $I + J = (1)$, akkor ellenben $IJ = I \cap J$.

11. Legyenek X,Y affin algebrai halmazok. Ekkor a $pr_Y : X \times Y \to Y$, $pr_Y(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} y$ reguláris leképezés neve *az Y-ra vett vetítés (projekció).*

(1) Mutassuk meg, hogy ha $Z \subseteq Y$ zárt halmaz, $f : X \to Y$ egy reguláris leképezés, akkor

$$f(Z) = pr_Y(\Gamma_f \cap Z) .$$

(2) Bizonyítsuk be, hogy minden $f : X \to Y$ affin algebrai halmazok közti reguláris leképezéshez létezik olyan $g : X \to X \times Y$ morfizmus, hogy g izomorf módon képezi le X-et $X \times Y$ egy zárt részhalmazára, és $f = pr_Y \circ g$. Röviden: minden reguláris leképezés előáll egy beágyazás és egy vetítés kompozíciójaként.

12. Igazoljuk az ideálok radikáljaira vonatkozó alábbi összefüggéseket (R tetszőleges gyűrű, $I, J \lhd R$).

(1) $I \subseteq \sqrt{I}$.
(2) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
(3) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
(4) $\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$.
(5) $\sqrt{I} = (1)$ pontosan akkor, ha $I = (1)$.
(6) Ha $I \lhd R$ prímideál, akkor minden n pozitív egészre $\sqrt{P^n} = P$.
(7) Ha $\sqrt{I} + \sqrt{J} = 1$, akkor $I + J = (1)$.
(8) $\sqrt{I}$ megegyezik az I-t tartalmazó prímideálok metszetével.

Adjunk példát arra, hogy radikál-ideálok összege nem mindig radikál.

13. Legyen X affin algebrai halmaz, $f, g \in k[X]$ reguláris függvények. Jelölje

$$X_f \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} = X - V(f) .$$

Mutassuk meg, hogy teljesülnek az alábbiak.

(1) $X_f \cap X_g = X_{fg}$.
(2) $X_f = \emptyset$ pontosan akkor, ha $f = 0 \in k[X]$.
(3) $X_f = X$ pontosan akkor, ha $f \in k[X]^\times$.
(4) $X_f = X_g$ pontosan akkor, ha $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$.
(5) Mutassuk meg hogy X kompakt.
(6) Igazoljuk, hogy $U \subseteq X$ pontosan akkor kompakt, ha véges sok X_f alakú halmaz uniója.