1. Gyakorlat

1. Legyen R tetszőleges gyűrű. Ekkor az alábbiak ekvivelensek:
   (1) Minden R-beli ideál végesen generált.
   (2) (Felszálló lánc feltétel) Minden R-beli ideálokból álló $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_m \subseteq \ldots$ ideállánc véges sok lépésben stabilizálódik.

2. Legyen k tetszőleges test, $\{ S_i \mid i \in I \}$ pedig $k[x_1, \ldots, x_n]$-beli részhalmazok egy halmaza. Mutassuk meg, hogy
   (1) ha $S_1 \subseteq S_2$, akkor $V(S_2) \subseteq V(S_1) \subseteq \mathbb{A}_k^n$;
   (2) $\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i)$.

3. Ha $X \subseteq \mathbb{A}_k^3$ a három koordinátatengely uniója, akkor adjuk meg X ideálját generátorokkal. Mutassuk meg, hogy az $I(X) \subseteq k[x, y, z]$ ideált nem lehet háromnál kevesebb elemmel generálni. Ez a tény azért érdekes, mert $X \subseteq \mathbb{A}_k^3$ kodimenziója csak 2.

4. Legyen $X \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\} \subseteq \mathbb{A}_k^3$ az ún. *csavart harmadfokú görbe*. Határozzuk meg az ideálját $k[x, y, z]$-ben, és döntsük el, hogy legalább hány elem kell a generálásához. Mutassuk meg, hogy $k[X]$ izomorf egy egyváltozós k feletti polinomgyűrűvel.

Definíció. Legyen (X, τ) egy topologikus tér. Azt mondjuk, hogy (X, τ) *irreducibilis*, ha nem áll elő mint két valódi zárt részhalmazának az uniója. Másképpen: ha X irreducibilis, $F, g \subseteq X$ zárt, $F \cup G = X$, akkor vagy $X = F$, pedig $X = G$. Egy (X, τ) topologikus tér *noether*, ha minden zárt részhalmazokból álló szigorúan leszálló lánc véges hosszú.

5. Mutassuk meg, hogy ha X irreducibilis topologikus tér, $U \subseteq X$ nemüres nyílt halmaz, akkor U is irreducibilis az altértopológiára nézve.

6. Legyen X tetszőleges topologikus tér, $Y \subseteq X$ altér, amely irreducibilis az altértopológiára nézve. Igazoljuk, hogy Y X-beli lezártja[1], $\overline{Y} \subseteq X$, szintén irreducibilis.

Házi feladatok

7. Tekintsük a $V(x^2 - yz, xz - x) \subseteq \mathbb{A}^3$ affin algebrai halmazt. Mutassuk meg, hogy három irreducibilis komponense van, és határozzuk meg ezeket (adjuk meg az őket definiáló prímideálokat).

8. Igazoljuk, hogy a topologikus terek noether tulajdonsága ekvivalens az alábbiak mindegyikével.
   (1) Zárt részhalmazok tetszőleges családjának van a tartalmazásra nézve minimális eleme.
   (2) Nyílt halmazok tetszőleges szigorú felszálló lánca véges.
   (3) Nyílt részhalmazok tetszőleges családjának van a tartalmazásra nézve maximális eleme.

9. Bizonyítsuk be, hogy egy noether topologikus tér kompakt (azaz minden nyílt fedésének van véges részfedése).

[1] $\overline{Y}$ nem más, mint az összes Y-t tartalmazó X-beli zárt halmaz metszete.

10. Mutassuk meg, hogy egy noether és Hausdorff topologikus tér nem lehet más, mint egy véges ponthalmaz a diszkrét topológiával (azaz minden részhalmaza nyílt).

11. Legyenek $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{A}_k^n$ affin algebrai halmazok. Igazoljuk, hogy

(1) $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$,

(2) $I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)}$.

Adjunk példát arra, hogy a második egyenlőségben a radikálra valóban szükség van, azaz $I(X_1 \cap X_2)$ ne minden radikálideál.

12. Mutassuk meg, hogy az $X \stackrel{\text{def}}{=} \{(t, t^3, t^5) \mid t \in \mathbb{A}^1\} \subseteq \mathbb{A}^3$ halmaz affin algebrai, és határozzuk meg az ideálját.

Nehezebb feladatok

13. Írjuk le, hogy az $\mathbb{A}_k^2$ affin térnek milyen algebrai részhalmazai vannak, ha k algebrailag zárt.

14. Adjunk meg egy olyan noether-féle topologikus teret, amelyben az irreducibilis zárt halmazokból álló szigorúan leszálló láncok (véges) hosszainak nincsen felső korlátja.