

5. GYAKORLAT

1. Határozzuk meg az $L(w, k)$ számokat a $k = 1, 2, 3$ esetekben a

$$w = 1432254323145213$$

szóra.

2. Legyen a w szó Knuth-ekvivalens a T tabló szavával. Mutassuk meg, hogy T sorainak a száma megegyezik a w -ben található leghosszabb szigorúan fogyó sorozat hosszával. Általánosabban, igazoljuk, hogy a T első k oszlopában található dobozok száma megegyezik azzal a legnagyobb számmal, amely előállítható, mint k darab diszjunkt szigorúan fogyó w -beli szó hosszainak az összege.

3. (Erdős–Szekeres) Mutassuk meg, hogy minden természetes számokból álló legalább $n^2 + 1$ hosszú sorozatban van vagy egy legalább n hosszú monoton növekvő, vagy egy n hosszú szigorúan fogyó részsorozat. Adjunk példát arra, hogy az állítás éles.

4. Keressünk olyan 6 hosszú w szót, amelyre $L(w, 1) = 4$, $L(w, 2) = 6$, de nincs w -ben diszjunkt négy és kettő hosszú növekvő sorozat.

5. Adjuk meg az alábbi w szavak $P(w)$ tablóját és $Q(w)$ beillesztési tablóját.

- (1) 1234234343432
- (2) 123331243221123
- (3) 86427531

Minden esetben fejtsük vissza a w szót a $(P(w), Q(w))$ tablópárból.

HÁZI FELADATOK

6. (Cauchy–Littlewood) Igazoljuk a Schur-polinomokra vonatkozó alábbi azonosságot a Robinson–Schensted–Knuth megfeleltetés segítségével:

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_n) s_{\lambda}(y_1, \dots, y_m) .$$

DEFINÍCIÓ. Egy $w = x_1 \dots x_r$ szót *fordított rácsszónak* nevezünk, ha az x_r, x_{r-1}, \dots, x_1 sorozat minden kezdőszelete legalább annyi 1-est tartalmaz mint 2-est, legalább annyi 2-est, mint hármast, és így tovább.

7. Döntsük le, hogy az alábbi szavak közül melyik fordított rácsszó.

- (1) 2132121
- (2) 1232121
- (3) 13212311321

8. Legyenek $w \equiv w'$ Knuth-ekvivalens szavak. Bizonyítsuk be, hogy w' pontosan akkor fordított rácsszó, ha w az.

9. Igazoljuk, hogy a $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ Littlewood–Richardson-szám megegyezik azoknak a fordított rács-szavaknak a számával, amelyek ν_1 darab 1-est, ν_2 darab 2-est, stb. tartalmaznak, és előállnak $w = tu$ alakban, ahol t egy λ -alakú, u pedig egy ν -alakú tabló szava.

DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathbb{C}[S_n]$ az S_n szimmetrikus csoporthoz tartozó ún. *csoportalgebra*. Ez a

$$\sum_{\sigma \in S_n} c_{\sigma} \sigma$$

alakú komplex együtthatós formális lineáris kombinációk halmaza, ahol a szorzást a S_n -beli elemek szorzása és a disztributivitás adják.

10. Ellenőrizzük, hogy S_n egy komplex reprezentációja ugyanaz, mint egy bal $\mathbb{C}[S_n]$ -modulus.

11. Mutassuk meg, hogy S_n hat az n -dobozú Young-diagramok számozásain az alábbi módon: egy T számozás esetén $\sigma \cdot T$ az a számozás, ahol az i elem helyére $\sigma(i)$ -t írjuk.

12. Egy n -dobozú Young-diagram T számozásához hozzárendelhetjük T ún. $R(T)$ sor-, illetve $C(T)$ oszlop csoportját, ahol

$$R(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \sigma \in S_n \mid \sigma \cdot T \text{ minden sora } T \text{ ugyanazon sorának egy permutációja} \},$$

$$C(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \sigma \in S_n \mid \sigma \cdot T \text{ minden oszlopa } T \text{ ugyanazon oszlopának egy permutációja} \}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $R(T)$, $C(T)$ valóban részcsoportjai S_n -nek, továbbá

$$R(\sigma \cdot T) = \sigma R(T) \sigma^{-1}, \quad C(\sigma \cdot T) = \sigma C(T) \sigma^{-1}.$$

13. Legyen T egy n -dobozú Young-diagram egy számozása. Tekintsük az alábbi $\mathbb{C}[S_n]$ -beli elemeket:

$$a_T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in R(T)} \sigma, \quad b_T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\tau \in C(T)} \text{sgn}(\tau) \tau, \quad c_T \stackrel{\text{def}}{=} b_T a_T.$$

A c_T elem neve a T -hez tartozó *Young-szimmetrizátor*. Lássuk be az alábbi műveleti azonosságokat: ha $\sigma \in R(T)$ és $\tau \in C(T)$, akkor

- (1) $\sigma a_T = a_T \sigma = a_T$,
- (2) $\text{sgn}(\tau) \tau b_T = b_T \text{sgn}(\tau) \tau = b_T$,
- (3) $a_T^2 = |R(T)| a_T$, $b_T^2 = |C(T)| b_T$,
- (4) $\sigma c_T \text{sgn}(\tau) \tau = c_T$.

14. ** Az előző feladatok jelöléseivel ha T és U különböző alakú diagramok számozásai, akkor $c_T \mathbb{C}[S_n] c_U = 0$.

15. ** Legyen $V_T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}[S_n] c_T \leq \mathbb{C}[S_n]$ a c_T elem által generált részmodulus. Igazoljuk, hogy V_T izomorfia erejéig csak T alakjától függ, és V_T az S_n csoport egy irreducibilis reprezentációja.