Algebrai kombinatorika / 2009 ősz / Küronya Alex

4. Gyakorlat

1. Döntsük el, hogy az alábbi szavak közül melyik $w(T)$ alakú!
   (1) 8765432321
   (2) 12345678
   (3) 6784567345
   (4) 34523451233
   (5) 456333123

2. Tekintsük azt a T tablót, amelynek a szava 5622341112, és az $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2$ elemeket. Határozzuk meg az

$$U \stackrel{\text{def}}{=} ((T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \leftarrow x_3$$

tablót, és az x_1, x_2, x_3 elemek kiütési útvonalait.

3. Legyen U az a μ-alakú tabló, amelynek a szava 6644533341222, $\lambda = (3, 3, 2, 1)$. Adjuk meg azt az egyértelműen meghatározott T tablót és x_1, x_2, x_3, x_4 számokat, amelyekre

$$U \;=\; (((T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \leftarrow x_4 \;.$$

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges T tablóra igaz, hogy $\emptyset \bullet T = T$.

5. Az alábbi szavak mindegyikéhez találjuk meg azt az egyértelműen meghatározott tablót, amelynek a szavával Knuth-ekvivalens.
   (1) 87654321321
   (2) 186269123461237
   (3) 837594561834333

Házi feladatok

6. A Jacobi–Trudi-formula valamelyik alakjának segítségével lássuk be, hogy tetszőleges λ partíció és m pozitív egész esetén

$$s_\lambda(1, X, X^2, \ldots, X^m) \;=\; X^r \prod_{i<j} \frac{X^{\lambda_i - \lambda_j + j - i} - 1}{X^{j-i} - 1} \;,$$

ahol $r = \sum_i (i-1)\lambda_i$. Hasonlóképpen igazoljuk, hogy

$$s_\lambda(1, 1, \ldots, 1) \;=\; \prod_{i<j} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \;.$$

7. Igazoljuk, hogy minden m, n pozitív egészre az

$$\{s_\lambda(X_1, \ldots, X_m) \,|\, \lambda \text{ legfeljebb } m\text{-sorú partíció}, |\lambda| = n\}$$

halmaz az $\mathbb{Z}$-együtthatós m-változós n-edfokú homogén polinomok egy $\mathbb{Z}$-bázisát alkotja.

8. Írjuk fel az alábbi szorzatokat Schur-polinomok lineáris kombinációiként.

(1) $s_{(2,1)}(X_1, X_2, X_3) \cdot h_2(X_1, X_2, X_3)$,
(2) $s_{(2,1)}(X_1, X_2, X_3) \cdot e_2(X_1, X_2, X_3)$,
(3) $s_{(2,2)}(X_1, X_2, X_3) \cdot h_3(X_1, X_2, X_3)$.