

2. GYAKORLAT

1. Határozzuk meg az alábbi partíciókhoz tartozó háromváltozós Schur-polinomokat:  $(2, 1)$ ,  $(2, 1, 1)$ .

2. Adjuk hozzá sorbeillesztéssel a 2 elemet az alábbi tablóhoz:

1	2	2	3	5
2	3	6	6	
4	4	7	7	
5	6			

3. Bizonyítsuk be, hogy ha adott egy tabló és az újonnan hozzáadott doboz helye, akkor meg tudjuk határozni az eredeti tablót, illetve azt az elemet, amelyet hozzáadtunk.

4. Szorozzuk össze az alábbi két tablót sorbeillesztéssel!

1	2	2	3		
3	4			1	3
5	5			2	

5. Legyen  $G$  véges csoport,  $V$  véges-dimenziós vektortér,  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  a  $G$  csoport egy reprezentációja. Definiáljuk  $\rho$  *duális reprezentációját* az alábbi módon:

$$\rho^* : G \rightarrow GL(V^*) ,$$

$$\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^T .$$

Igazoljuk, hogy  $\rho^*$  valóban  $G$  egy reprezentációja, továbbá  $\langle f^*, e \rangle = f^*(e)$  valamely bázisban, akkor

$$\langle \rho^*(g)(v^*), \rho(g)(v) \rangle = \langle v^*, v \rangle .$$

6. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi leképezések  $S_3$  reprezentációi:

(1)  $\alpha : S_3 \rightarrow GL(\mathbb{C})$ ,  $\alpha(g)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \text{sgn}(g)v$ .

(2) Ha  $x_1, x_2, x_3$  koordináták  $\mathbb{C}^3$ -on, akkor

$$\beta(g)((x_1, x_2, x_3)) = (x_{g^{-1}(1)}, x_{g^{-1}(2)}, x_{g^{-1}(3)}) .$$

Ez utóbbi esetben keressük meg a maximális invariáns alteret. Van-e  $\mathbb{C}^3$ -nak olyan altere, amelyre megszorítva  $\beta$  irreducibilis?

## HÁZI FELADATOK

7. Adjuk hozzá sorbaillesztéssel a 3 elemet az alábbi táblóhoz.

1	1	1	1	5
2	2	6	6	
4	5	7	7	
5	8			

8. Írjuk fel a  $(2, 2)$  partícióhoz tartozó négyváltozós Schur-polinomot.

9. (Schur-lemma) Legyenek  $V, W$  a  $G$  véges csoport irreducibilis reprezentációi,  $\phi : V \rightarrow W$  egy  $G$ -modulus-homomorfizmus. Ekkor

- (1)  $\phi$  izomorfizmus vagy  $\phi = 0$ ,
- (2) ha  $V = W$ , akkor  $\phi = \lambda I_V$  valamely  $\lambda \in \mathbb{C}$ -re.

10. Sorbaillesztéssel szorozzuk össze az alábbi két tablót!

1	5	5	5
3	6		
7	8		

1	2
5	