ALGEBRAI KOMBINATORIKA / 2009 ŐSZ / KÜRONYA ALEX

2. GYAKORLAT

1. Határozzuk meg az alábbi partíciókhoz tartozó háromváltozós Schur-polinomokat: $(2,1), (2,1,1)$.

2. Adjuk hozzá sorbeillesztéssel a 2 elemet az alábbi tablóhoz:

1	2	2	3	5
2	3	6	6	
4	4	7	7	
5	6			

3. Bizonyítsuk be, hogy ha adott egy tabló és az újonnan hozzáadott doboz helye, akkor meg tudjuk határozni az eredeti tablót, illetve azt az elemet, amelyet hozzáadtunk.

4. Szorozzuk össze az alábbi két tablót sorbeillesztéssel!

1	2	2	3
3	4		
5	5		

1	3
2	

5. Legyen G véges csoport, V véges-dimenziós vektortér, $\rho : G \to GL(V)$ a G csoport egy reprezentációja. Definiáljuk ρ *duális reprezentációját* az alábbi módon:

$$\rho^* : G \to GL(V^*) \ ,$$
$$\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^T \ .$$

Igazoljuk, hogy ρ^* valóban G egy reprezentációja, továbbá $\langle f^*, e\rangle = f^*(e)$ valamely bázisban, akkor

$$< \rho^*(g)(v^*), \rho(g)(v) >=< v^*, v > \ .$$

6. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi leképezések S_3 reprezentációi:

(1) $\alpha : S_3 \to GL(\mathbb{C})$, $\alpha(g)(v) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{sgn}(g)v$.
(2) Ha x_1, x_2, x_3 koordináták $\mathbb{C}^3$-on, akkor

$$\beta(g)((x_1, x_2, x_3)) \ = \ (x_{g^{-1}(1)}, x_{g^{-1}(2)}, x_{g^{-1}(3)}) \ .$$

Ez utóbbi esetben keressük meg a maximális invariáns alteret. Van-e $\mathbb{C}^3$-nak olyan altere, amelyre megszorítva β irreducibilis?

Házi feladatok

7. Adjuk hozzá sorbaillesztéssel a 3 elemet az alábbi tablóhoz.

1	1	1	1	5
2	2	6	6	
4	5	7	7	
5	8			

8. Írjuk fel a $(2,2)$ partícióhoz tartozó négyváltozós Schur-polinomot.

9. (Schur-lemma) Legyenek V, W a G véges csoport irreducibilis reprezentációi, $\phi : V \to W$ egy G-modulus-homomorfizmus. Ekkor

(1) ϕ izomorfizmus vagy $\phi = 0$,
(2) ha $V = W$, akkor $\phi = \lambda I_V$ valamely $\lambda \in \mathbb{C}$-re.

10. Sorbaillesztéssel szorozzuk össze az alábbi két tablót!

1	5	5	5
3	6		
7	8		

1	2
5	