Algebrai kombinatorika / 2009 ősz / Küronya Alex

1. Gyakorlat

Legyen R egy tetszőleges (kommutatív egységelemes) gyűrű. Egy $f \in R[X]$ polinomot *formálisan n-edfokú*nak nevezünk, ha $\deg f \leq n$. A formálisan m-edfokú f és a formálisan n-edfokú g R-beli együtthatós polinomok *rezultánsát* az alábbi módon definiáljuk: amennyiben

$$f(X) = a_m X^m + \cdots + a_1 X + a_0 \ \text{ és } g(X) = b_n X^n + \cdots + b_1 X + b_0 ,$$

akkor

$$\operatorname{res}(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdot & \cdot & a_0 & & & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdot & \cdot & a_0 & & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & a_m & a_{m-1} & \cdot & \cdot & a_0 & \\ & & & & & a_m & a_{m-1} & \cdot & \cdot & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdot & \cdot & b_0 & & & & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdot & \cdot & b_0 & & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & & & b_n & b_{n-1} & \cdot & \cdot & b_0 & \\ & & & & & b_n & b_{n-1} & \cdot & \cdot & b_0 \end{vmatrix} .$$

A nem megnevezett elemek vagy pontok által jelölt helyeken nullák állnak.

Ha $f \in R[X]$ egy n-edfokú nemkonstant normált polinom, akkor f *diszkriminánsa* az alábbi módon határozható meg:

$$\Delta_f \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{n(n-1)/2} \cdot \operatorname{res}(f, f') ,$$

ahol f' az f polinom deriváltját jelöli.

1. A determinánsokkal való számolási szabályok segítségével igazoljuk a rezultánsok alábbi tulajdonságait.
   (1) Ha $r, s \in R$, akkor $\operatorname{res}(rf, sg) = r^n s^m \cdot \operatorname{res}(f,g)$.
   (2) $\operatorname{res}(g,f) = (-1)^{mn} \operatorname{res}(f,g)$.
   (3) Legyen $\phi : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, és jelölje $\phi \circ f$, illetve $\phi \circ g$ az f és g polinomok ϕ szerinti képét $S[X]$-ben. Ekkor

$$\operatorname{res}(\phi \circ f, \phi \circ g) = \phi \circ \operatorname{res}(f,g) .$$

2. Bizonyítsuk be az $f \in R[X]$ polinomok diszkriminánsaira vonatkozó alábbi klasszikus eredményeket.
   (1) Ha $f = X^2 + pX + q$, akkor $\Delta_f = p^2 - 4q$.
   (2) Ha $f = X^3 + pX^2 + qX + r$, akkor $\Delta_f = p^2q^2 + 18pqr - 4p^3r - 4q^3 - 27r^2$.
   (3) Ha $f = X^m + aX + b$ és $m \geq 2$, akkor $\Delta_f = (-1)^{m(m-1)/2}((1-m)^{m-1}a^m + m^m b^{m-1})$.

3. Írjuk fel az $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 \in R[X_1, X_2, X_3]$ szimmetrikus polinomot mint a megfelelő elemi szimmetrikus polinomok egy polinomját.

4. Legyen $R[X]$ egy egyváltozós polinomgyűrű,

$$h = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \ \in R[X]$$

olyan polinom, amelyre $a_n \in R^{\times}$.
(i) Gondoljuk meg, hogy $R[X]$-ben működik a h-val való maradékos osztás.
(ii) Igazoljuk, hogy minden $f \in R[X]$ egyértelműen írható

$$f = f_{n-1} X^{n-1} + \cdots + f_1 X + f_0$$

alakba, ahol $f_i \in R[h]$. Továbbá minden f_i egyértelműen írható

$$f_i = \sum_{j\geq 0} a_{ij}h^j \ , \ a_{ij} \in R$$

alakba.

(iii) Bizonyítsuk be, hogy h algebrailag független R felett, és $\{1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}\}$ egy szabad generátorrendszere $R[X]$-nek mint $R[h]$-modulusnak.

Házi feladatok

5. Számítsuk ki a következő $\mathrm{res}(f, g)$ rezultánsokat (m illetve n jelöli az f és g polinomok formális fokát):
   (1) $m = 1$, $g \in R$.
   (2) $m = n = 1$, $f = a_1X + a_0$, $g = b_1X + b_0$.
   (3) $f = a_2X^2 + a_1X + a_0$, $g = b_2X^2 + b_1X + b_0$.

6. Igazoljuk, hogy ha $f, g \in R[X]$ normált polinomok, akkor

$$\Delta_{fg} = \Delta_f \cdot \Delta_g \cdot \mathrm{res}(f, g)^2 \ .$$

7. Igaz-e az alábbi állítás: ha $f \in R[X]$ egy 1-főegyütthatós polinom, $c \in R$, akkor

$$\Delta_f = \Delta_{f(X+c)} \ .$$

8. Legyen M egy szabad R-modulus (azaz tegyük fel, hogy létezik M-nek szabad generátorrendszere). Igazoljuk, hogy ekkor M minden szabad generátorrendszerének ugyanaz a számossága. Ezt a számosságot M *rang*jának nevezzük.

9. Legyen k test, $\phi \in k(X_1, \ldots, X_n)$ szimmetrikus racionális törtfüggvény. Ekkor $\phi \in k(s_1, \ldots, s_n)$, azaz kifejezhető az elemi szimmetrikus polinomok racionális törtfüggvényeként.

10. Legyenek $R \subseteq S$,$S \subseteq T$ gyűrűbővítések, $\mathcal{G}_1 \subseteq S$ egy szabad generátorrendszere S-nek R felett, $G_2 \subseteq T$ pedig T egy szabad generátorrendszere S felett. Mutassuk meg, hogy

$$\mathcal{G}_1\mathcal{G}_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{g_1g_2 \,|\, g_1 \in \mathcal{G}_1 \ , \ g_2 \in \mathcal{G}_2\}$$

T egy szabad generátorrendszere R felett.

11. Egy $f \in k[X]$ nullától különböző polinom esetén az $\alpha \in k$ elem pontosan akkor többszörös nullhelye f-nek, ha $f'(\alpha) = 0$.