5. számelmélet gyakorlat (2008/2009)

1. Old meg az alábbi lineáris kongruenciákat illetve lineáris diophantikus egyenleteket.

(a) $23x \equiv 11 \ (5)$,

(b) $36x \equiv 81 \ (21)$,

(c) $80x \equiv 32 \ (108)$,

(d) $555x \equiv 5555 \ (55555)$,

(e) $15x + 13y = 19$,

(f) $18x + 28y = 10$.

2. Old meg az alábbi magasabb fokú kongruenciákat:

(a) $10x^{39} + 8x^{20} + 9x^3 + 7x \equiv 0 \ (19)$,

(b) $13x^{41} \equiv 27 \ (100)$.

3. Van-e olyan egész együtthatós $p(x)$ polinom, ami valamikortól kezdve csak prímszámokat vesz fel?

4. Két százlábú a lábait számolgatja.

(a) Az első tudja, hogy legfeljebb 250 lába van. 11-esével számolva 5 lába maradt ki, 15-ösével pedig 3. Hány lába van?

(b) A másodiknak 12-esével számolva 4 maradt ki, 15-ösével pedig 8. Bizonyítsd be, hogy nem tud számolni a szerencsétlen állat.

5. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges nemtriviális számtani sorozatban tetszőleges k-hoz található a sorozatnak k egymást követő összetett tagja.

6.* Mi $39^{39^{39}}$ utoló két számjegye?

7.** Bizonyítsd be, hogy ha $\varphi(n) = \varphi(k) = d$, akkor léteznek olyan $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{N}$ számok, amik mod n és mod k is redukált maradékrendszert alkotnak.

HF. Legyenek $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ prímszámok. Hány darab páronként inkongruens megoldása van az $x^2 \equiv 1 \ (p_1 \dots p_r)$ kongruenciának?