4. számelmélet gyakorlat (2008/2009)

1. Határozd meg m-et, ha a következő számok ugyanannak a redukált maradékosztálynak az elemei mod m

(a) 2 és 14,

(b) 18, 78 és 178.

2. Mennyi $\varphi(8800)$?

3. Bizonyítsd be, hogy minden n természetes számra

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

4. Bizonyítsd be, hogy minden n-re $13 \mid n^{20} + 4n^{44} + 8n^{80}$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha m páratlan és osztója egy $n^2 + 1$ alakú számnak, akkor $4k + 1$ alakú.

6. Bizonyítsd be a szita formula segítségével, hogy ha n különböző prímosztói $p_1, \ldots, p_r$, akkor

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{r} \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big).$$

7*. Tegyük fel, hogy az $r_1, \ldots, r_{\phi(m)}$ számok redukált maradékrendszert alkotnak modulo m.

1. Határozzuk meg az összes a számot, amelyre $ar_1, \ldots, ar_{\phi(m)}$ elemek páronként inkongruenesek modulo m;
2. Adjuk meg az összes olyan c számot, amelyre az $r_1 + b, \ldots, r_{\phi(m)} + b$ elemek redukált maradékrendszert alkotnak (szintén modulo m).

HF. Jelölje tetszőleges rögzített a, m számok esetén $f(b)$ az $ax \equiv b \pmod{m}$ kongruencia megoldásainak a számát. Határozzuk meg a

$$\sum_{i=1}^{m} f(i)$$

összeget.

8. Legyenek a, b természetes számok, amelyekre teljesül, hogy $19 \mid a^{40} + b^{40}$. Igazoljuk, hogy ekkor $19 \mid a$ és $19 \mid b$ is teljesül.