3. számelmélet gyakorlat (2008/2009)

1. Bizonyítsd be, hogy ha $a \equiv b \pmod{m}$, akkor $a^m \equiv b^m \pmod{m^2}$.

2. Mi a 303^{404} utolsó jegye tizes számrendszerben illetve utolsó két jegye binárisan?

3. Add meg a legkisebb pozitív x-et, melyre

(a) $11^{23} \equiv x \ (9)$,

(b) $39^{7^5} \equiv x \ (7)$.

4. Igazold az alábbi, kongruenciákra vonatkozó összefüggéseket:

(a) ha $a \equiv b \ (cm)$, akkor $a \equiv b \ (m)$,

(b) $c \neq 0$ egészre $a \equiv b \ (m)$ akkor és csak akkor, ha $ac \equiv bc \ (mc)$,

5. Mi a hiba a következő gondolatmenetben (azon kívül, hogy nyilvánvaló marhaságot ad): "Mivel $3 \equiv 6 \ (3)$ ezért $\frac{3}{3} \equiv \frac{6}{3} \ (3)$".

6. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges a, c, m egészek esetén az $ax \equiv c \ (m)$ kongruencia pontosan akkor oldható meg x-re, ha $(a, m) \mid c$.

7. Határozd meg azokat a p prímeket, amikre $\binom{3p}{p} \equiv p - 2 \ (p)$.

8. Bizonyítsd be, hogy ha m prím vagy egy páratlan prím kétszerese, akkor

$$a^2 \equiv b^2 \ (m) \text{ esetén } a \equiv b \ (m) \text{ vagy } a \equiv -b \ (m).$$

Más m-ekre mutass ellenpéldát.

9.* Bizonyítsd be, hogy ha $n \geq p$ prím, akkor $\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p}\right] \ (p)$.

HF. Legyen n tetszőleges és k páratlan természetes szám. Milyen maradékot ad n-el osztva $1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k$?