1. számelmélet gyakorlat (2008/2009)

1. *Jelölje F_n az n-edik Fibonacci-számot, vagyis $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $n \geq 2$-re $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazold az alábbi összefüggéseket:*

1. $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$,

2. $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$,

3. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

2. Bizonyítsd be, hogy nincsen olyan 3-mal osztható Fibonacci-szám (F_n), melyre a kettővel rákövetkező Fibonacci-szám (F_{n+2}) is osztható 3-mal.

3. Bizonyítsd be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

4. Bizonyítsd be, hogy ha n és m természetes számok, akkor

1. $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$,
2. $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$,
3. $30 \mid mn(m^4 - n^4)$.

5. Határozd meg azokat az n természetes számokat, melyekre $2^n + 1$ osztható 3-mal.

6. Bizonyítsd be, hogy minden n pozitív egészre $133 \mid 11^{n+1} + 12^{2n-1}$.

7. Bizonyítsd be, hogy minden $a \in \mathbb{N}$-re az $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ tört nem egyszerűsíthető.

8.* Mutassuk meg, hogy tetszőleges k, n pozitív egészek esetén $F_{(k,n)} = (F_k, F_n)$.

HF. Igazoljuk, hogy minden n, k, a pozitív egészre $(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1$. Határozzuk meg $(a^n + 1, a^k + 1)$ értékét is.