Homologikus algebra / 2005 ősz

8.-9-10. Házi feladat

1. * Legyenek m, d természetes számok, $d|m$, és tekintsük az $R = \mathbb{Z}/m$ gyűrűt. Igazoljuk, hogy minden B R-modulus esetén

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}/m}(\mathbb{Z}/d, B) = \begin{cases} B/dB & \text{if } n = 0 \\ ({}_dB)\,/(m/d)B & \text{if } n > 0\,,\ 2 \nmid n \\ \big({}_{m/d}B\big)\,/dB & \text{if } n > 0\,,\ 2|n\ . \end{cases}$$

2. Legyen G tetszőleges csoport, A G-modulus, $\mathbb{Z}$ triviális G-modulus. Mutassuk meg, hogy

$$A_G \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \qquad \text{és} \qquad A^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)\ .$$

3. * Legyen G tetszőleges csoport, A G-modulus, I a $\mathbb{Z}G$ csoportalgebra augmentációs ideálja. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_G(I, A) & \longrightarrow & \mathrm{Der}(G, A) \\ \phi & \mapsto & D_\phi(g) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(g-1) \end{array}$$

leképezés abel-csoportok közti természetes izomorfizmus.

4. * Legyen M egy jobb-R-modulus. Ekkor egy d pozitív egész számra az alábbiak ekvivalensek:

(1) $\mathrm{pd}_{\#1}(M) \le d$,
(2) $\mathrm{Ext}_R^n(M, B) = 0$ minden $n > d$ és B bal-R-modulus esetén,
(3) $\mathrm{Ext}_R^{d+1}(M, B)$ minden B bal-R-modulus esetén,
(4) ha $0 \to M_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ M egy olyan feloldása, amelyben minden P_i projektív, akkor M_d szintén projektív.

5. ** Ha $0 \to A \to B \to C \to 0$ R-modulusok egy rövid egzakt sorozata, akkor

$$\mathrm{pd}_{\#1}(B) \le \max\big\{\, \mathrm{pd}_{\#1}(A) \,\big\}, \mathrm{pd}_{\#1}(C)\ ,$$

továbbá az egyenlőtlenség valójában egyenlőség, hacsak nem $\mathrm{pd}_{\#1}(C) = \mathrm{pd}_{\#1}(A) + 1$.

6. ** Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges M R-modulusra igaz, hogy M végesen prezentált és lapos $\Leftrightarrow$ M projektív.

7. ** (a) Igazoljuk, hogy testek tetszőleges szorzata Neumann-reguláris.

(b) Legyen K test, V egy K feletti vektortér. Bizonyítsuk be, hogy $R \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{End}_K(V)$ Neumann-reguláris; továbbá R pontosan akkor féligegyszerű, ha $\dim_K V < \infty$.

8. * Legyen A egy abel-csoport. Lássuk be, hogy $A = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

9. ** Igazoljuk a következőt: egy R gyűrű pontosan akkor Neumann-reguláris, ha minden I végesen generált jobbideálhoz létezik $e \in I$ idempotens, amelyre $I = eR$.