Homologikus algebra / 2005 ősz

7. Házi feladat

1. * (Patkó-lemma) Tekintsük az alábbi diagrammot, amelyben az oszlopok projektív feloldások, az egyetlen sor pedig egzakt.

$$
\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & & {} \arrow[d] & \\
 & P'_1 \arrow[d, "d'_1"'] & & P''_1 \arrow[d, "d''_1"'] & \\
 & P'_0 \arrow[d, "\epsilon'"'] & & P''_1 \arrow[d, "\epsilon''"'] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i"'] \arrow[d] & A \arrow[r, "p"'] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Mutassuk meg, hogy létezik A-nak olyan projektív feloldása, illetve megfelelő láncleképezések úgy, hogy az oszlopok komplexusok közti rövid egzakt sorozatot alkotnak.

Definíció: Az E modulust az M modulus *lényeges kiterjesztésének* nevezzük, ha $M \subseteq E$, és minden $S \subseteq E$ nemnulla részmodulusra $S \cap M \neq 0$.

2. Ha $M \subseteq E \subseteq F$, E lényeges kiterjesztése M-nek, F lényeges kiterjesztése E-nek, akkor F lényeges kiterjesztése M-nek.

3. * Egy M modulus pontosan akkor injektív, ha nincsen valódi lényeges kiterjesztése.

4. ** Legyen M tetszőleges R-modulus, $M \subseteq E$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

(1) E maximális lényeges kiterjesztése M-nek.
(2) E injektív, és lényeges kiterjesztése M-nek.
(3) E injektív, és nincsen E', amelyre $M \subseteq E' \subsetneq E$.

Továbbá minden M-re létezik fenti tulajdonságokkal rendelkező E modulus, amit M *injektív burkának* hívunk.