Homologikus algebra / 2005 ősz

6. Házi feladat

1. * (Projektív bázis tétel) Egy M modulus pontosan akkor projektív, ha léteznek benne olyan $\{ a_k \mid k \in K \}$ elemek és $\{ \phi_k : M \to R \mid k \in K \}$ R-modulusleképezések, amelyekre

(1) minden $x \in M$ esetén $\phi_k x = 0$ majdnem minden k-ra, és
(2) minden $x \in M$ esetén $x = \sum_{k \in K} (\phi_k x) a_k$.

Ekkor az is igaz, hogy az $\{ a_k \mid k \in K \}$ elemek generálják M-et.

2. * Mutassuk meg, hogy egy P lánckomplexus pontosan akkor projektív $Ch(R-mod)$-ban, ha projektív modulusokból álló felhasadó egzakt sorozat.

3. Igazoljuk, hogy $Ch(R-mod)$-ban minden elem egy projektív objektum homomorf képe.

4. ** (Watts tétele) Legyen $F : \mathfrak{R} - mod \to \mathfrak{A}b$ egy kovariáns jobbegzakt funktor, amely megőrzi a direkt összegeket. Ekkor

$$F \cong \quad \otimes_R B$$

valamely B bal R-modulusra, amelyet választhatunk $B = F(R)$-nek.

5. * Injektív modulusok tetszőleges családjának direkt szorzata injektív.

6. * Egy E modulus pontosan akkor injektív, ha minden

$$0 \to E \to B \to C \to 0$$

egzakt sorozat, amelyben C ciklikus, felhasad.

7. Igazoljuk az osztható modulusokról szóló alábbi állításokat.

(1) Egy osztható modulus minden faktora osztható.
(2) Egy osztható modulus minden direkt összeadandója osztható.
(3) Osztható modulusok direkt szorzata és direkt összege is osztható.

8. Egy torziómentes modulus pontosan akkor osztható, ha az alapgyűrű hányadostestje feletti vektortér.

9. Ha R főideálgyűrű, akkor egy M R-modulus pontosan akkor injektív, ha osztható.